TRISECCIÓ, QUADRATURA I DUPLICACIÓ: TRES PROBLEMES CLÀSSICS DE LA MATEMÀTICA GREGA

Francesc X. BARCA SALOM
Universitat Politècnica de Catalunya

TRISECCIÓ, QUADRATURA I DUPLICACIÓ: TRES PROBLEMES CLÀSSICS DE LA GEOMETRIA GREGA

1. La Matemàtica a Mesopotàmia
1.1 El marc històric
1.2 Fonts
1.3 El Sistema de Numeració Babilònica
1.4 Operacions aritmètiques
1.5 Taules de recíprocs
1.6 Fraccions babilòniques
1.7 Taules i aproximacions
1.8 Les triades pitagòriques
1.9 Àlgebra babilònica
1.10 La geometria babilònica
1.11 Conclusió

2. La Matemàtica a Egipte
2.1 El marc històric
2.2 Fonts
2.3 El sistema de numeració
2.4 L'aritmètica a Egipte
2.4.1 Les operacions bàsiques
2.4.2 Les fraccions
2.4.3 Addició de fraccions
2.4.3 Subtracció de fraccions
2.4.5 Multiplicació de fraccions
2.4.6 Alguns problemes aritmètics
2.5 Problemes algebraics
2.6 Geometria
2.6.1 Càlcul d'àrees
2.6.2 Càlcul de volums
2.6.3 Rudiments de trigonometria
2.7 Conclusió

3. L'empirisme prehel·lènic i el miracle grec.
3.1 Àmbit geogràfic
3.2 Períodes de la ciència grega
3.3 Fonts
3.4 L'aritmètica grega
3.5 La numeració parlada
3.6 La numeració escrita
3.7 Curiositats numèriques
3.8 Operacions aritmètiques

4. La secta pitagòrica
    4.1 El coneixement matemàtic
    4.2 Els nombres i la seva classificació
    4.3 Els nombres pitagòrics
    4.4 La geometria a l’escola pitagòrica
        4.4.1 Avenços atribuïts a la geometria pitagòrica
        4.4.2 El Teorema de Pitàgores

5. Els incommensurables
    5.1 La diagonal d’un quadrat
    5.2 La secció àurea

6. La determinació de les àrees

7. La teoria de les proporcions
    7.1 Les proporcions a Èudox
    7.2 El mètode d’exhaustió

8. Les paradoxes de Zenó
    8.1 Les paradoxes
    8.2 Zenó d’Elea maltractat per la història
    8.3 Aristòtil i l’infinit.

9. La Trisecció de l’angle
    9.1 Origen del problema
    9.2 La neuseis
    9.3 Reducció de la trisecció a un problema d’inserció
    9.4 La Concoide de Nicomedes
    9.5 La concoide per trisecar l’angle
    9.6 Neuseis amb l’ajut d’una circumferència.
    9.7 Trisecció amb l’ajut de l’espiral d’Arquímedes
    9.8 Trisecció mitjançant la quadratriu
    9.9 Trisecció amb la hipèrbola
    9.10 Alguns mètodes per trisecar posteriors a l’antiguitat grega.

10 La Quadratura del cercle
    10.1 La quadratura de les lúnules
        10.1.1 Primera quadratura de la lúnula
        10.1.2 Altres quadratures
    10.2 Les primeres referències del problema
    10.3 Els primers intents: Antifó i Brisó
    10.4 La quadratriu d’Hipies
    10.5 Objeccions de Sporus a la quadratriu
    10.6 L’espiral d’Arquimedes
    10.7 Sobre les solucions d’Apol·loni i de Carpus

11 La Duplicació del cub
11.1 L'origen del problema
11.2 Hipòcrates i les dues mitjanes proporcionals
11.3 Arquites de Tarent
11.4 La solució d'Arquites
11.5 La demostració de la solució d'Arquites
11.6 Arquites en versió actual
11.7 La solució perduda
11.8 Menecmo i el descobriment de les seccions còniques
11.9 La duplicació amb còniques
11.10 El peu de sabater
11.11 Interpretació analítica del mètode de Plató
11.12 La solució mecànica d'Eratòstenes
11.13 La concoide per duplicar
11.14 Apol·loni i la duplicació del cub
11.15 La cissoide de Diocles
11.16 La cissoide per a duplicar el cub
11.17 Solucions de Sporus i Pappos per la duplicació

12. Conclusió

13.- Quadratura i trisecció a la Barcelona vuitcentista
13.1 La situació acadèmica i docent a la Barcelona del segle XIX
13.2. Descripció de les memòries de quadratura
13.2.1- Dictamen d'A. Canellas sobre el treball: "La cuadratura del circulo y razón del diámetro a la circunferencia" de Pablo Vallaure
13.2.2.- Un informe de Francesc Sanponts sobre un treball de refutació d'una quadratura presentat per Pere Martir Armet
13.2.3.- Treball elaborat per Joan Gerard Fochs titulat: *Informe sobre la disertación o sea tratado del Sr Caetano Marchetti Tomassi sobre la cuadratura del círculo*
13.2.4.- *La cuadratura del círculo y la circulación del cuadrado —o sea— La reducción del círculo a un cuadrado, y de este a un círculo, de la misma área* de M. de Almd[a]. Margard[e] i la resposta d'Onofre Novellas i Francesc Claret
13.2.5.- *Impugnación a la cuadratura del círculo resuelta por D. Leoncio Agües*. Memòria llegida per l'acadèmic Laur Clariana Ricart.
13.3.- Actitud dels quadradors
13.3.1.- Agusti Canellas i el suposat geòmetra d'Oviedo
13.3.2. Armet i la relació entre quadratura i artilleria
13.3.2. La memòria lliurada pel Marquès de Llupià
13.3.4. L'informe de la Junta de Comerç
13.3.5. Els acadèmics reaccionen
13.3.6. Debat a la premsa

13.4.- Descripció de les memòries de trisecció
13.4.1.- La memòria de Baltasar Cardona
13.4.2.- Les triseccions de San German
13.4.3.-La corba de Fola
13.4.4.- La trisecció de Jeroni Anyé
13.5.- Actitud dels trisecadors
13.5.1.- Silenci dels acadèmics
13.5.2.- L'Acadèmia per fi reacciona
13.6.- Conclusió

14.- Bibliografia

1. LA MATEMÀTICA A MESOPOTÀMIA

1.1. El marc històric

Quan parlem de Mesopotàmia ens estem referint a un conjunt divers de pobles i de cultures que van habitar la regió compresa entre els dos rius: Eufrates i Tigris. Es tractava d'unes civilitzacions eminentment urbanes compostes per homes i dones que vivien en ciutats com Nippur, Ur, Susa, Babilònia, Assur o Ninive.

Aquest territori va ser ocupat, primerament, cap el 4000 aC. pels sumeris, els quals fundaren la capital Ur i donaren nom al país: Sumer. Aquesta primera civilització va ser la responsable de la invenció de l'escriptura cuneïforme. Aquest tipus d'escriptura estava formada per 560 signes que representaven les síl·labes. Els sumeris plasmaren aquest símbols en unes tauletes o en uns cilindres d'argila mitjançant punxons cilíndrics o triangulars.

Al 3000 aC, cap el nord del territori es van establir unes tribus semites i allí van fundar la ciutat d'Accad. Els seus habitants reberen el nom d'accadis. Poc a poc els accadis van anar ocupant tot el territori i cap el 2500 aC. dominaren tot Sumer. Els sumeris reaccionaren i amb l'ajut de diverses tribus muntanyeses com els amorites van establir cap el 2000 aC. un període d'hegemonia sumèria. Però les invasions semites del 1900 aC. van acabar dominant l'imperi.

L'etapa més brillant des del punt de vista científic és la del govern d'Hammurabi cap el 1780 aC. ja que és l'etapa de la qual es conserven més textos matemàtics i astronòmics. Aquesta cultura científica sol ser anomenada sumerio-accadia o sumerio-babilònica ja que sumeris i semites foren els dos pobles que més hi contribuïren.

Aquest període no va ser massa llarg i cap el 1600 aC. va començar el seu declivi i es va iniciar un etapa d'obscuritat per a la cultura babilònica que a més va estar marcada per les invasions. Cap el 1650 aC. havia començat la primera de les invasions, la de les tribus hitites i hurrites i altres anomenades indoeuropees.

Les emigracions del 1000 aC. afavoriren que els asiris es fessin amb el poder i que cap el 750 aC. establissin l'Imperi Assiri, fins el 612 aC. en què les tribus del desert anomenades caldeus el derrotaren i el destruïren Uns anys després, 538 aC., van ser els perses qui dominaren els caldeus i van establir l'Imperi Persa. Ciro fou un dels governants més destacats. Des del punt de vista científic, aquesta etapa es caracteritzà pel contacte de la ciència mesopotàmica amb els matemàtics grecs i per ser un període de còpia de textos anteriors. Des del punt de vista cultural se substituí la llengua accàdia per l'arameu.

Al 330 aC. Alexandre el Gran va conquerir Mesopotàmia i a la seva mort es va instaurar una dinastia formada per governants d'origen grec el primer dels quals va ser Seleuc I el qual va fundar la dinastia que dona el nom al període selèucida del qual també es conserven alguns documents de tipus científic. Al 60 dC. la cultura babilònica ja havia desaparegut (TATON, 1988: I, 88) (KLINE, 1992: 20) (SÁNCHEZ PEREZ, 1943: 8) (NEUGEBAUER, 1969: 30). (HODGKIN, 2005).

1.2. Fonts

Les fonts per a la matemàtica babilònica són textos gravats en tauletes d'argila. Els mesopotàmics escrivien sobre tova i després la coïen o la deixaven assecar al Sol. Per escriure feien servir uns estris en forma de prisma de secció triangular.

Actualment es conserven 500.000 tauletes en els museus que només són una part petita ja que a les ruïnes de les ciutats mesopotàmiques encara se'n conserven moltes més.

Les tauletes de contingut matemàtic es poden situar en dos etapes diferents:

1) El període 1800 a 1600 aC. del qual procedeixen la major part dels textos matemàtics i que correspon a l'època contemporània d'Hammurabi.

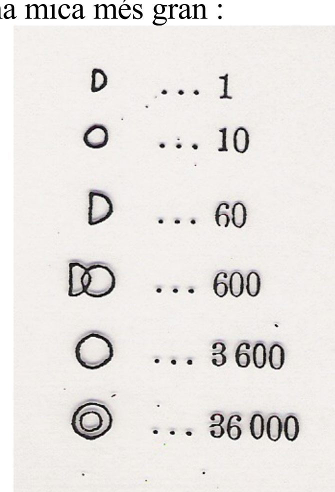
2) El període selèucida, que abasta els segles I, II, i III aC. En ell s'observa que hi ha major nombre de procediments numèrics i que en la numeració s'empra un símbol per representar el zero.

Els textos matemàtics són de dos tipus. Be són taules com les de multiplicar o be són problemes relacionats amb la resolució de problemes algebraics i geomètrics dels quals n'hi ha una gran varietat.

1.3. El Sistema de Numeració Babilònica

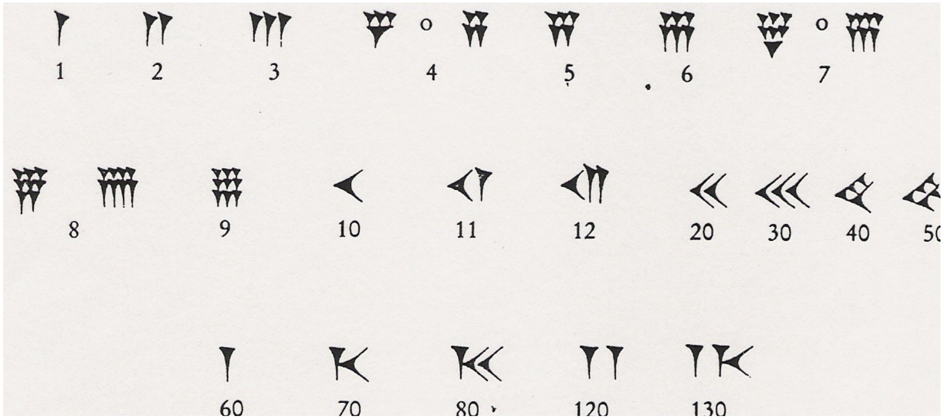
La numeració que apareixia en les tauletes sumèries primitives utilitzava només dos símbols una rodona i una mitja rodona. La raó d'aquest símbols estava en el punxó utilitzat que tenia secció circular. La combinació d'aquest símbols i l'augment de la seva mida permetia representar diversos números

Com que la base del sistema de numeració era seixanta aquesta quantitat es representava amb el mateix símbol que la unitat però una mica més gran :



Al voltant del 2000 aC. Es va començar a utilitzar el punxó de secció triangular i la numeració va evolucionar de manera que va combinar només tres símbols :

El sistema de numeració babilònic era mixt ja que barrejava característiques d'un sistema sexagesimal i hi incorporava alguns trets del sistema decimal. La raó és trobava en què aquest sistema de numeració era la síntesi del sistema de numeració decimal d'origen accadi o semític i el sistema de numeració sexagesimal d'origen sumeri (KLINE, 1992: 22).



Per exemple :

seria 3,42,13,20 que passat a decimal donaria

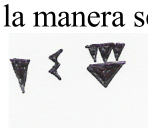
$$3\cdot60^3+42\cdot60^2+13\cdot60+20 = 800.000.$$

Aquest sistema de numeració no disposava de zero i aquest fet li produïa certs inconvenients que li donaven alguna ambigüitat.

Així,

tant podia ser 1, 20 com ser 1, 0, 20. En el primer cas donava $1\cdot60+20= 80$ i en el segon era $1\cdot60^2+0.60+20=3.620$. A mesures que van anar passant els anys per solucionar aquests problemes on havia d'anar un zero, els babilònics deixaven un espai. En el període selèucida ja es va emprar el símbol següent per representat l'absència d'unitats.

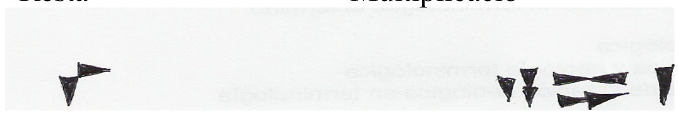
Així 3.604 era 1,0,4 i es representava de la manera següent:



1.4. Operacions aritmètiques

La suma es feia juxtaposant símbols i tant la resta com la multiplicació utilitzaven símbols específics per a indicar que entre aquells dos nombre s'havia de fer aquesta operació :

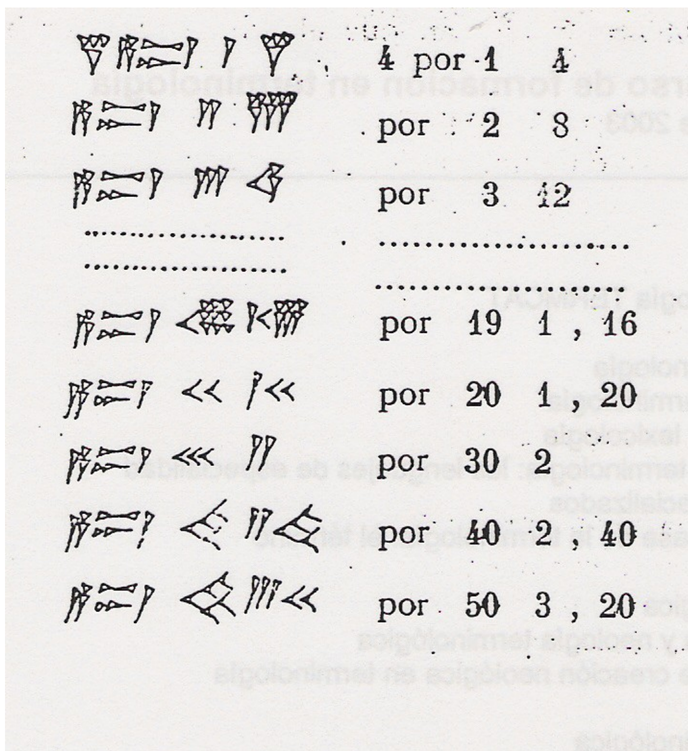
Resta Multiplicació



La divisió es realitzava pel procediment de multiplicar per recíproc.

Els babilònics disposaven de taules de multiplicar com les de multiplicació per 4 o la de multiplicació per 25. Aquestes taules estaven combinades amb taules de pesos i mesures necessària per a la vida econòmica diària. Aquest fet indica que aquestes taules eren apreses al mateix temps que els textos econòmics. Val a dir que moltes tauletes trobades a la ciutat de Nippur es creu que es tractaven de textos escolars, és a dir que es tractaven d'exercicis escrits pels aprenents a escribes.

El sistema de numeració sexagesimal implicava l'ús de taules de multiplicar de l'1 al 59. No obstant només escrivien els productes de l'1 fins el 20 i després els de les desenes 30, 40 i 50, se suposa que per raons d'espai (SÁNCHEZ PEREZ, 1943).



1.5. Taules de recíprocs

Entre les taules de multiplicar es van trobar algunes en les quals el multiplicadors eren :

1,20 ; 1,30 ; 1,40 ; 3,20 ; 3,45

Cal recordar que $1,20 = 1\cdot60+20 = 80$

Això va fer pensar els historiadors que possiblement hi havia taules de multiplicar no només fins a 60 sinó també fins a $60^2= 3.600$. Més tard van trobar una altra taula de multiplicar en la qual el multiplicador era $44,26,40 =44\cdot60^2 + 26\cdot60+40=160.000$. Fou a les hores que la possibilitat que hi hagués taules fins a $60^3= 216.000$ va resultar absurda i és va començar a pensar que aquestes taules obeïen a altres motius.

Finalment la pregunta es va respondre en trobar totes aquestes quantitats inclosa la de 44,26,40 en una taula de recíprocs.

Una taula de recíprocs és una taula on en un costat hi ha un nombre b i al costat el nombre $\bar{b}$ de manera que $b \bullet \bar{b} = 1$.

2	30	16	3,45	45	1,20		
3	20	18	3,20	48	1,15		
4	15	20	3	50	1,12		
5	12	24	2,30	54	1,6,40		
6	10	25	2,24	1	1		
8	7,30	27	2,13,20	1,4	56,15		
9	6,40	30	2	1,12	50		
10	6	32	1,52,30	1,15	48		
12	5	36	1,40	1,20	45		
15	4	40	1,30	1,21	44,26,40		

La taula del dibuix recull aquests valors i és de tal manera que en la columna de la dreta hi ha els inversos de la columna de l'esquerra ja que

$$\frac{1}{2} = 0;\,30$$

$$\frac{1}{3} = 0,20$$

$$\frac{1}{4} =1,15$$

$$\dots\dots$$

$$\frac{1}{1,21} = 0\,;0,44,26,40$$

Aleshores totes les taules que abans havíem esmentat i que van preocupar els historiadors corresponien a la resolució de divisions pel procediment de multiplicar pel recíproc

$$a \bullet \bar{b} = \frac{a}{b}$$

S'observa que la taula de recíprocs tenia alguns forats que precisament corresponien als nombres que no tenien recíproc com 7, 11, 13, 14, etc. ja que

$$\frac{1}{7} = 8,34,17,8,34,17,\ldots$$

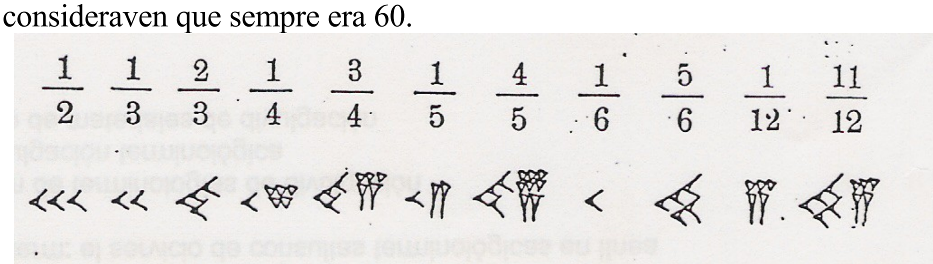
dóna una fracció recurrent, i

$$\frac{1}{11} = 5,27,16,21,49,\ldots$$

dóna una fracció infinita. Es tracta, doncs, de nombres irregulars el recíprocs dels quals no es poden expressar amb una fracció sexagesimal de nombre finit (NEUGEBAUER, 1969: 39).

1.6. Fraccions babilòniques

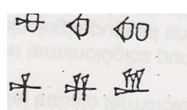
Els babilònics representaven les fraccions amb els mateixos símbols que utilitzaven per representar els nombre ara bé només representaven el numerador de la fracció ja que el denominador consideraven que sempre era 60.



Com es pot suposar aquesta representació comportava certa ambigüitat ja que el mateixos símbols podien representar fraccions diferents. Així,

podia ser $\frac{21}{60}$ o també $\frac{20}{60}+\frac{1}{60^2}$

Algunes fraccions senzilles tenien símbols especials com $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ que es podien representar respectivament així:



És evident que el context era molt important ja que indicava si es tractava d'una fracció i era l'únic que podia evitar que hi poguessin haver confusions. Tinguis en compte que

1,0,4
Podia significar

$$1 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 4 = 3.604$$
o bé
$$1 \cdot 60 + 0 + 4/60 = 60 + 1/15$$

1.7. Taules i aproximacions

S'han trobat tauletes on hi ha taules de quadrats i cubs. Una d'elles conté una taula dels quadrats dels nombre enters de l'1 al 60. En aquesta taula hi ha representats els nombre

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

i a partir del quadrat de 7 els altres quadrats els escriu així :

$$1,4 = 60+4 = 8^2$$
$$1,21 = 60+21 = 9^2$$
$$1,40 = 60+40 = 10^2$$
$$2,1 = 60^2+1 = 11^2$$

i així successivament fins

$$58,1 = 58 \cdot 60+1=59^2$$

També s'ha trobat una taula de cubs dels trenta primers nombres. En ella es representen diversos cubs de la manera següent :

$$4^3 = 1,4 = 60+4$$
$$16^3 = 1,8,16 = 60^2+8 \cdot 60+16 = 4.096$$
$$30^3 = 7,30 = 7 \cdot 60^2+ 30 \cdot 60 = 27.000$$

Els babilònics necessitaven els quadrats i els cubs per donar solució a alguns tipus especials d'equacions quadràtiques o cúbiques.

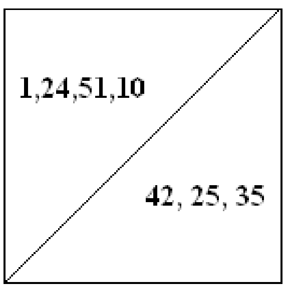
Una de les tauletes trobades resolia el problema de buscar una aproximació al recíproc dels nombres irregulars. Entendrem per nombres irregulars aquells que no tenen un recíproc que sigui una expressió sexagesimal finita.

Es tracta de l'aproximació dels nombres recíprocs de 7, 11, 13, 14, 17, etc.. En aquesta taula apareix una aproximació al recíproc de 7

$$8,34,16,59 < \bar{7} < 8,34,18$$

Aquest exemple mostra que els babilònics tenien interès per les aproximacions

A la col·lecció Yale Babilònia hi ha dibuixat un quadrat de costat 30 i a la diagonal hi ha els nombres 1,24,51,10 i 42,25,35 escrits a sobre d'ella.



El significat d'aquest dibuix és el següent: Si multipliques

$$1{,}24{,}51{,}10 \cdot 30 = 42{,}25{,}35$$

Aquesta operació és pot fer fàcilment dividint

$$1{,}24{,}51{,}10 : 2$$

ja que 2 i 30 són recíprocs.

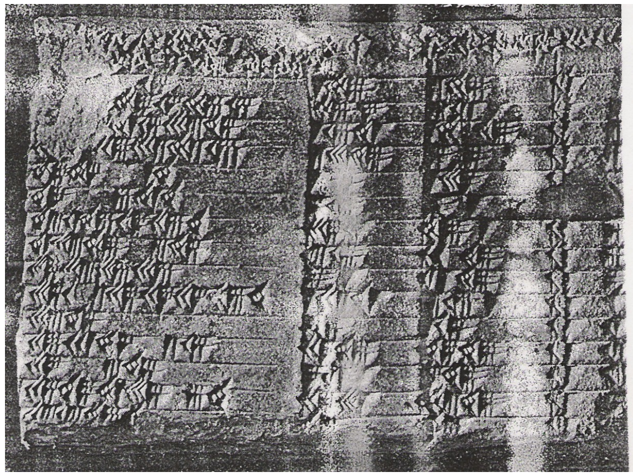
El valor obtingut 42,25,35 és el valor de la diagonal d'un quadrat de costat 30 i aleshores 1,24,51,10 és l'arrel quadrada de 2. És una aproximació molt bona ja que si és quadra s'obté:

1;59,59,59,38,1,40 que vol representa un resultat amb un error menor de $22/60^4$. En decimals seria 1,414213.

Aquest exercici és una mostra que el Teorema de Pitàgores era ja conegut entre els babilònics 1.000 anys abans que Pitàgores hi visqués (NEUGEBAUER:1969, 35) .

1.8. Les triades pitagòriques

A més de l'exemple anterior hi ha un altre text que prova que els babilònics van fer recerca sobre les triades pitagòriques. A la Plimpton Collection de la Universitat de Columbia a Nova York es conserva una tauleta trencada. Es creu que aquesta tauleta era més llarga i que alguna part és va perdre abans de l'excavació. Actualment té quatre columnes.



- La darrera és una llista de números de l'1 al 15. És tracta d'una numeració de casos.
- Les II i III són un costat *b* i la diagonal *d* d'un rectangle.
- El significat de la columna I no és tan evident. S'han afegit els zeros i s'han restaurat els valors que falten i aleshores resulta la taula següent :

I	II (= *b*)	III (= *d*)	IV
[1,59,0,]15	1,59	2,49	1
[1,56,56,]58,14,50,6,15	56,7	3,12,1	2
[1,55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1,]5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1,]48,54,1,40	1,5	1,37	5
[1,]47,6,41,40	5,19	8,1	6
[1,]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1,]41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
[1,]38,33,36,36	9,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45	1,15	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1,]27,0,3,45	7,12,1	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1,]23,13,46,40	56	53	15

1) si coneixem *d* i *b* fàcilment podem trobar *l* de manera que $d^2 = b^2 + l^2$

2) si calculem els valors de d^2/l^2 obtenim, precisament els valors de la columna I que havia estat reconstruïda.

Exemple : fila 11

b= 45

d= 1,15 = 60+15=75

$$l = \sqrt{75^2 - 46^2} = 60$$

$$d^2/l^2 = 75^2/60^2 = 1{,}5625 = 1{,}33{,}45$$

El resultat és el valor que apareix a la fila 11 de la columna I.

Després de veure això es pensa que :

1) La columna del costat *l* hi era en el tros de la tauleta que falta.
2) A més, es creu que els babilònics estaven interessats també en el valor de les raons *d/l*.

Avui saben que les ternes pitagòriques es poden obtenir així :

$l = 2pq$, $b = p^2 - q^2$, $d = p^2 + q^2$ qualsevol que siguin p i q nombres primers entre si i amb $p>q$.

Aleshores es pot expressar *d/l* de la següent manera :

$$\frac{d}{l} = \frac{p^2+q^2}{2pq} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right) = \frac{1}{2}\left(p\bar{q}+\bar{p}q\right)$$

Això prova que *d/l* es pot expressar com a fracció sexagesimal finita si *p* i *q* són nombres que es poden expressar també de la mateixa manera.

S'ha comprovat que si en la taula anterior es calcula *p* i *q* corresponents a *l, b* i *d* s'obtenen uns nombres que sorprenentment coincideixen amb els nombres que apareixen a la taula de recíprocs. Aquest raonaments han fet afirmar a Otto Neugebauer a *The Exact sciences in antiquity* que les ternes pitagòriques eren conegudes pels babilònics.

1.9. Àlgebra babilònica

Els mètodes anomenats algebraics giraven al voltant de solucions d'equacions de segon grau. El problema típic consistia en: *Trobar un número tal que sumat al seu recíproc doni un de conegut.* En notació moderna seria :

$$x \bullet \bar{x} = 1$$

$$x + \bar{x} = b$$

En el text babilònic es procedeix així: En primer lloc cal conèixer el valor de b. Per exemple: b=2;0,0,33,20. Aleshores, primer calculaven:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 1;0,0,33,20,4,37,46,40$$

Després restaven 1

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1$$

i a continuació es treia l'arrel quadrada

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{0;0,0,33,\ 20,4,\ 37,46,40} = 0,0,44,43,20$$

i finalment es restava o se sumava aquest resultat a $\frac{b}{2}$.

Com es pot veure aquest procés numèric era similar a l'aplicació de la fórmula:

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1} = 1,0,0,16,40,+ 0,0,44,43,20 = 1,0,45$$

$$\bar{x} = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1} = 1,0,0,16,40,+ 0,0,44,43,20 = 0,59,15,33,20$$

Això prova que la fórmula per resoldre l'equació de segon grau s'aplicava correctament. També prova que els nombres sexagesimals llargs s'usaven sense restriccions.

Hi ha centenars de problemes que s'anomenen de *forma normal* que són així:

Troba dos nombres el producte dels quals i la suma o resta dels quals siguin respectivament coneguts. En la forma actual seria:

$$x \bullet y = a$$
$$x \pm y = b$$

i les solucions utilitzades semblen emprar les fórmules:

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp a}$$

$$y = \pm\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp a}$$

Tanmateix mai consideraven les solucions negatives i a més a les tauletes únicament hi apareixien exemples numèrics. La solució era verbal i sense símbols tot i que de vegades hi havia paraules que hom creu que servien per indicar les incògnites com (KLINE, 1992: I, 26):

us = longitud
Saq= amplada
asa= àrea

per exemple:

He multiplicat la longitud per l'amplada i l'àrea és 10. He multiplicat la longitud per ella mateixa i he obtingut una àrea. L'excés de la longitud sobre l'amplada l'he multiplicat per si mateixa i el resultat per 9. Y aquesta àrea és l'àrea obtinguda en multiplicar la longitud per ella mateixa. ¿Quant és la longitud i quant l'amplada?

En aquest exercici si la longitud la designem per x i l'amplada per y pot ser resolt en forma actual mitjançant el sistema:

$$x \bullet y = 10$$
$$9(x - y)^2 = x^2$$

1.10. La geometria babilònica

La geometria utilitzada pels babilònics era pràcticament insignificant a jutjar per les poques tauletes dedicades a aquesta temàtica. Només hi ha algunes que tracten del càlcul d'àrees i de volums i algunes empren fórmules errònies. Això fa pensar que, molt sovint, no els interessava el resultat exacte sinó una bona aproximació. Així, per exemple, per calcular l'àrea del cercle feien servir:

$$A = \frac{C^2}{12}$$ on C era la longitud de la circumferència.

Això significava utilitzar un valor de $\pi = 3$.

La geometria babilònica era una col·lecció de regles per calcular les àrees i els volums i s'estudiava en connexió amb els problemes pràctics. Tanmateix, els babilònics eren coneixedors del teorema de Pitàgores i de les regles de proporcionalitat entre triangles semblants i ho aplicaven correctament.

En una tauleta hi ha un exemple consistent a dividir un trapezi en dues parts iguals mitjançant una recta paral·lela a la base. L'escriba dóna una solució correcta que ens permet pensar que havia emprat la fórmula:

$$m = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Hom pensa que el problema havia estat resolt mitjançant un sistema d'equacions:

Àrea del trapezi gran =Àrea del trapezi 1 + Àrea del trapezi 2

Àrea del trapezi 1= Àrea del trapezi 2

Que escrit en llenguatge actual seria el sistema següent:

$$\frac{a+b}{2}\left(h_1 + h_2\right) = \frac{a+m}{2}h_1 + \frac{m+b}{2}h_2$$
$$\frac{a+m}{2}h_1 = \frac{m+b}{2}h_2$$

i si eliminem h_1 i h_2 obtenim el valor de m de la fórmula anterior (SÁNCHEZ PÉREZ, 1943: 21).

Com es pot veure, la geometria juga un paper secundari dins de les matemàtiques babilòniques ja que és només un entre els diversos temes de la vida pràctica que els procediments aritmètics poden resoldre. La importància de la matemàtica rau a l'aritmètica.

1.11. Conclusió

La matemàtica babilònica tenia per finalitat eminentment pràctica: resoldre problemes estrets de la realitat o bé s'aplicava a la docència. Per això hi trobem exercicis que plantegen una situació real i que després de ser formulats es resolen únicament de manera numèrica i, de vegades, en acabar la resolució hi afegien la frase *com és el procediment*. Però, també hi havia d'altres que els trobem repetits diverses vegades i que per això hom creu que corresponien a exercicis adreçats a alumnes.

Entre aquest segon cas es troben els exercicis simples de resolució de problemes anomenats algebraics on la primera condició és sempre x·y=10,0 i la segona va augmentant en complexitat fins arribar a expressions com:

$$(3x+2y)^2+\frac{2}{13}\left\{4\bullet\left[\frac{1}{7}(x+y)-\left(\frac{1}{2}+1\right)(x-y)\right]^2+(x+y)^2\right\}=4{,}45{,}0$$

Curiosament tots aquest exercicis tenien el mateix resultant final que és x=30 i y=20. Això ens indica que aquest no era gaire important i que el que es pretenia era la preparació de l'alumne i en conseqüència es valorava més el procediment que el resultat.

Amb els exemples estudiats sembla evident que hi havia procediments generals i no simples resultat. Ara bé on els babilònics posaven, per exemple 5+3, nosaltres hi posaríem x+y. Per això, resulta fàcil transformar els exemples numèrics a forma simbòlica reemplaçant els ideogrames per símbols actuals. En conseqüència no és del tot encertar afirmar que no hi havia fórmules general pel fet que no empressin mai una notació algebraica simbòlica.

2. LES MATEMÀTIQUES A EGIPTE

2.1. El marc històric

Abans del 3000 aC. Egipte estava dividit en dos regnes, un situat el nord i l'altre al sud. Però a l'inici d'aquell mil·lenni el rei Narmer (Menes) va unificar el territori sota una sola corona i va fundar la primera dinastia. Va començar aleshores l'Època Tinita (3000 aC.-2778 aC.) que correspon a les dinasties I i II i que rebé aquest nom perquè la seu reial residia a la ciutat de Tinis.

Després d'aquesta etapa inicial va començar un període important pel que fa al llegat monumental que es conserva. Es tracta de l'anomenat Imperi Antic (2778 aC.-2263 aC.) ocupat per les dinasties II, III i IV i en el qual es van construir les conegudes piràmides de Keops, Kefren i Micerino a les zones Sakkara i Gizeh.

Aquest període culturalment important fou seguit per un altre caracteritzat per les invasions i les lluites internes (2263 aC.- 2000 aC.) que va precedir el conegut com Imperi Mitjà (2000 aC.- 1785 aC.). Aquest Imperi fou ocupat per les dinasties XI i XII en ell destaquen el reis Amenemhat I, fundador de la XII dinastia que va traslladar la capital a Memfis, i Senusret III que dominà la Baixa Núbia i va centralitzar el poder tot suprimint els governadors provincials.

Els anys posterior a l'Imperi Mitjà van estar caracteritzats, de nou, per les invasions del pobles asiàtics com els hicses fins que al voltant del 1600 aC. es va tornar a aconseguir l'estabilitat. Aleshores va iniciar-se l'Imperi Nou (1580 aC. -1085 aC.) amb les dinasties XVIII, XIX i XX. En aquest període destaca Amenhotep III (o Amenofis III, que és la forma hel·lenitzada d'Amenhotep) que va fer construir el temple de Luxor i algunes parts de Karnak i durant el regnat del qual Egipte va aconseguir la seva màxima extensió. El seu fill Amenhotep IV va rebutjà l'advocació religiosa a Amon i va adorar un únic déu, anomenat Aton i per això va canviar el seu nom pel d'Akhenaton. Va estar casat amb Nefertiti i va voler imposar una fraternitat entre els pobles d'Orient. Però les derrotes militar i l'oposició del clergat la van fer fracassar. Pertanyen a l'Imperi Nou els reis Seti I, Ramsès II i Ramsès III.

Amb la fi de l'Imperi Nou acaba el període d'esplendor egipci i s'inicia un de decadència que desembocarà en el Baix Imperi (1085 aC.- 333 aC.) en el qual se succeïren diversos períodes de dominació assíria i persa entre mig d'alguns de breus de restauració dinàstica, com l'Etapa Saïta (633aC.-525aC.). Finalment, el 333 aC Alexandre el Gran va conquerir Egipte, va fundar la ciutat d'Alexandria i va iniciar l'etapa hel·lènica. Els seus successors establiren la dinastia macedònia dels Ptolemeus que va durar fins el 30 dC. En què Egipte va ser ocupat pels romans.

Tres factors caracteritzaven la vida a Egipte. Els primer era que l'economia girava a l'entorn de l'agricultura. La major part de la població vivia del conreu del camp dispersa al llarg del riu i per això hi havia poques concentracions urbanes. Els altres sectors de l'economia eres molt reduïts. Així, l'artesanat es concentrava al voltant de les institucions reials i dels temples, els quals n'eren, gairebé, els únics consumidors. Pel que feia al comerç es trobava en un estadi molt elemental de canvi o permuta.

El segon factor que caracteritzava la vida a Egipte era que al llarg dels 3.000 anys de duració d'aquest imperi no hi havia hagut gaires canvis tècnics remarcables. Per això hom parla d'un cert estancament tècnic que fan que el camperol egipci pugui ser considerat com un agricultor del Neolític.

El tercer factor a tenir en compte era l'estatisme faraònic. El faraó, deu i representant dels deus a la Terra, estava interessat, primerament en la unificació i la uniformització de tots els pobles que componien la vall del Nil i més tard en la lluita contra l'estament religió pel domini de la terra per tal d'afegir al poder polític el poder econòmic.

Dins la societat egípcia es podia distingir dues classes social. La més baixa, que estava composta pels agricultors, ramaders i artesans, i la més alta, que la formava el funcionariat constituït essencialment pels escribes. La prova d'aquesta afirmació la dóna l'obra literària anomenada *Sàtira dels oficis* en la qual un pare aconsella al seu fill sobre l'ofici que ha d'escollir.

> He considerat els que eren afligits, i per això desitjo que consagris el teu cor als llibres... L'escriba, qualsevol que sigui el seu lloc a l'administració, no patirà mai la misèria... M'agradaria que estimessis els llibres més encara que a la teva mare i poso els seus atractius davant dels teus ulls; aquesta professió és superior a totes les altres, i no hi ha a tot el país res que se li compari...
>
> He vist el metal·lúrgic en el seu treball, a la boca del forn; els seus dits són com la pell d'un cocodril; flairava pitjor que la fresa de peix...
>
> El fuster que manega l'aixa encara es cansa més que el pagès; el seu camp és la fusta i la seva aixada és el torn. Al capvespre es troba extenuat perquè ha treballat més enllà de les seves forces; i; tanmateix a la nit encara es veu llum a casa seva...
>
> El barber afaita fins molt entrada la nit. Va de racó ...
>
> El paleta...
>
> El jardiner...
>
> El teixidor...
>
> El sabater...
>
> Ja veus que no hi ha ofici en què no siguis manat, tret de l'ofici de funcionari: ell és qui mana...
>
> Ja veus que no hi ha escriba a qui li manqui el menjar i els avantatges dins del Palau Reial. És el seu propi destí, que el col·loca al capdavant de l'administració. Dóna, doncs, les gràcies al teu pare i a la teva mare perquè ells t'han posat en el camí de l'única vida veritable (GARELLI, 1974: 90).

Aquest és, molt possiblement un dels primers elogis de la funció pública que ens ajuda a conèixer l'estructura social de l'antic Egipte (MARCOLONGO, 1931:19) (MAZA, 2009).

2.2. Fonts

L'origen de la ciència a Egipte cal buscar-la en la gran quantitat d'operacions que comportava el Temple. La complexitat d'aquestes activitat va donar lloc que el sacerdot no confiés únicament en la seva memòria sinó que comencés a utilitzar símbols per representar quantitats i a utilitzar algorismes per agilitar les operacions més senzilles.

Les fonts primàries que es disposen per analitzar els progressos en matemàtiques són molt escasses. Els dos papirs més importants són el Papir de Rhind i el Papir de Moscou.

El Papir de Rhind va ser adquirit en el segle XIX a Luxor pel col·leccionista anglès Rhind. A partir de 1877, el professor de la Universitat de Heidelberg, Einsenlohr el va traduir i comentar per primera vegada. Més tard, al 1923, Eric Peet de la Universitat de Liverpool va donar una nova interpretació molt més perfecta. Posteriorment, entre 1927 i 1929, els professors Chance, Bull, Manning i Archibald de la Brown University van fer una altra edició.

Aquest papir és una còpia feta cap el 1650 aC. per l'escriba Ahmés d'un altre document anterior datat al voltant del 2000 aC. o del 1800 aC. El papir està dividit en dos trossos de 33 cm d'amplada i 5m 25 cm de longitud i un tercer tros central d'uns 18 cm. Aquest fragment més petit està dipositat a la Historical Society de Nova York i els dos més grans al British Museum de Londres. L'escriba que el va redactar va fer servir dos tipus d'escriptura: jeroglífica i hieràtica i en la capçalera va redactar el títol següent: *Regles per escrutar la natura i conèixer tot el que existeix,* *tot misteri i tot secret.*

El Papir de Rhind conté 84 qüestions que fan referència a les fraccions equivalents i a les operacions entre elles, a les proporcions i a la falsa posició i a d'altres qüestions aritmètiques i geomètriques.

El segon document important és el Papir de Moscou que fou adquirit a Luxor pel professor rus Golenischev i fou traduït a l'alemany i publicat íntegrament pels professors Struve i Turaioff. Com l'anterior, aquest papir és una còpia del 1850 aC d'un papir anterior i té una longitud similar. Conté 25 exercicis trets de la vida real la major part dels quals hi són presents en el Papir de Rhind. No obstant està escrit amb menys cura que l'anterior.

A part d'aquests dos documents important es conserven altres de menor importància:

1) El Papir de Kahun, descobert cap el 1889 i de la mateixa antiguitat que els dos anteriors, que conté exercicis de transformació de fraccions i d'altres de tipus aritmètic i una taula amb quatre sumes de nombres pitagòrics.

2) El Papir d'Akhmin datat els segles VII-VIII dC.

3) Un papir de l'època romana escrit en demòtica.

4) El Papir de Berlín

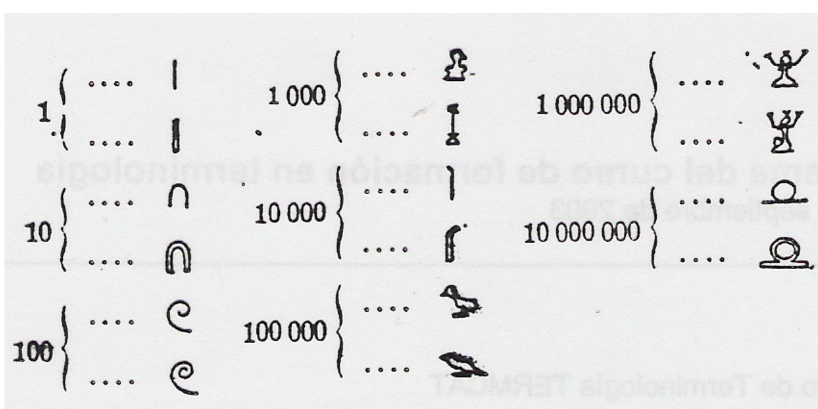
5) Algunes tauletes bizantines i coptes.

2.3. El sistema de numeració

Per la comprensió de la cultura egípcia hi ha una data i una obra que van ser essencials. Al 1824 Jean François Champollion (1790-1832) va publicar *Précis du système hiéroglyphique des anciens egipciens* i aleshores va ser possible la interpretació i comprensió de tots els textos i inscripcions de la cultura de l'Antic Egipte inclòs el sistema de numeració. Aquest descobriment va ser possible gràcies a que al 1799, una expedició napoleònica va trobar la coneguda pedra de Roseta la quan contenia un mateix text redactat en grec, demòtic i jeroglífic.

El sistema de numeració jeroglífic es remunta al 5000 aC. i feia servir l'enformador com a eina d'escriptura. Més tard, cap el 2500 aC. aquest estri va ser progressivament substituït per un de més lleuger, el càlam o ploma de canya, el qual va produir una evolució de l'escriptura des de la jeroglífica a la hieràtica. Posteriorment (700 aC.) va aparèixer un tercer tipus d'escriptura, la demòtica, reservada exclusivament per textos de caire popular.

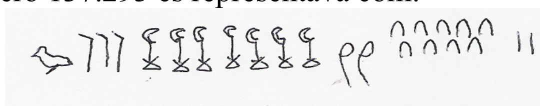
El sistema de numeració jeroglífic es caracteritza per ser repetitiu i per tant no posicional, per no disposar de símbol per representar la carència d'unitats o sigui del zero i per utilitzar la base deu.



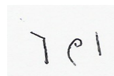
La numeració jeroglífica utilitzava un petit traç vertical per representar la unitat i el repetia les vegades convenients per representar els dígits fins al nou. El deu es representava per mitjà d'una u invertida que també es podia iterar per cada desena fins a arribar a noranta. Les centenes es representaven mitjançant una espiral, els milers per la flor de lotus etc.

El número s'escrivia d'esquerra a dreta començant per les unitats d'ordre superior. No obstant de vegades es representaven de dalt a baix i en altres ocasions els símbols s'orientaven al revés.

Així per exemple el número 137.293 es representava com:



i el número 10101 que conte dos zeros s'escrivia:



2.4. L'aritmètica a Egipte

2.4.1. Les operacions bàsiques

El sistema de numeració egipci basat en la juxtaposició facilitava molt les operacions de suma i resta com es por veure en l'exemple següent:

$$\cap\cap\cap\cap\cap \; mes \; \cap\cap\cap = \begin{matrix}\cap\cap\cap\cap\cap\\ \cap\cap\cap\end{matrix}$$

$$50 + 30 = 80$$

La facilitat per realitzar aquesta operació feia innecessari la seva explicitació com a regla. No succeïa el mateix en la multiplicació per la qual els egipcis feien servir un procediment originals anomenat duplicació.

El mètode de duplicació consistia, en llenguatge actual, en el següent: Suposem que volem fer la multiplicació de dos números A x B. Qualsevol nombre B es pot descompondre en potències de 2, així:

$$B = 2^{\alpha} + 2^{\beta} + 2^{\gamma} + \ldots + 2^{\omega}$$

Aleshores el producte

$$A \times B = A \times \left(2^{\alpha} + 2^{\beta} + 2^{\gamma} + \ldots + 2^{\omega}\right) = A \times 2^{\alpha} + A \times 2^{\beta} + A \times 2^{\gamma} + \ldots + A \times 2^{\omega}$$

es pot fer resolent els productes $A \times 2^{\alpha} + A \times 2^{\beta} + A \times 2^{\gamma} + \ldots + A \times 2^{\omega}$

Els egipcis procedien de la manera següent: Escrivien els termes de la sèrie 1, 2, 4, 8, 16,...2^{α} ... i els feien correspondre els de la sèrie A, A.2, A.3, A.4,.... A.2^{α} . A continuació, assenyalaven els termes de la primera sèrie que donen B i sumant els termes corresponents de la sèrie del costat obtenien el valor de A x B.

Per exemple:

75 x14

1............75
2...........150
4...........300
8...........600

14..........1.050

La divisió estava considerada com una operació inversa de la multiplicació i també es feia servir el mateix mètode de la duplicació. Ara be hi havia una dificultat afegida, que consistia en què la divisió podia ser exacta o inexacta. En tots dos casos calia establir la mateixa correspondència entre les potències de dos i el divisor i assenyalar els valors de la segona sèrie que igualen o s'aproximen més al dividend. El quocient s'obté en sumar els elements assenyalats de la primera sèrie.

Així si volem dividir 425 per 5

1.......5
2.....10
4......20
8.......40
16......80
32....160
64....320

85......425

Si la divisió és inexacta aleshores es procedeix de la mateixa manera fins el valor més aproximat possible i la resta al dividend dóna el valor del residu de la divisió.

Així la divisió 725 : 9

1..........9
2.........18
4.........36
8.........72
16......144
32.....288
64.....576

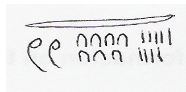
80.....720
5

725

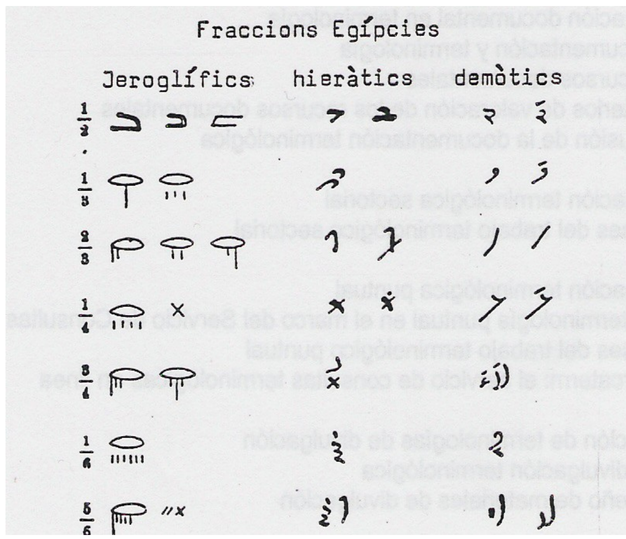
2.4.2. Les fraccions

Els egipcis utilitzaven únicament les fraccions de numerador unitat i escrivien únicament el denominador. Ara bé per distingir-les dels enters dibuixaven un símbol oval a sobre del número. Així la fracció:

$\frac{1}{279}$ es podia representar per:



Tanmateix havia algunes fraccions que tenien algun símbol especial com 2/3, 1/2, 1/3 o 1/4.



El fet de només fer servir fraccions de numerador unitat plantejava el problema de com descompondre qualsevol fracció m/n impròpia en suma de fraccions de numerador la unitat. En el Papir de Rhind hi ha una taula de descomposició de fraccions que conté les descomposicions de les fraccions 2/n amb n des de 5 a 101. Aquesta troballa fa pensar que l'ús d'aquestes taules devia ser habitual (CAJORI, 1993: 12).

TAULA DE DESCOMPOSICIÓ DE FRACCIONS
(Papir de Rhind)

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$
$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$
$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$
$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$
$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$
$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$
$\frac{2}{19}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$
$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$
$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$
$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$
$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$
$\frac{2}{29}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$
$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$
$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$
$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$
$\frac{2}{37}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$
$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$
$\frac{2}{41}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$
$\frac{2}{43}$	$\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$
$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$
$\frac{2}{47}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$
$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$
$\frac{2}{51}$	$\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$
$\frac{2}{53}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$
$\frac{2}{55}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$
$\frac{2}{57}$	$\frac{1}{38}+\frac{1}{114}$
$\frac{2}{59}$	$\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}$
$\frac{2}{61}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610}$
$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$
$\frac{2}{65}$	$\frac{1}{39}+\frac{1}{195}$
$\frac{2}{67}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536}$
$\frac{2}{69}$	$\frac{1}{46}+\frac{1}{138}$
$\frac{2}{71}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710}$
$\frac{2}{73}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}$
$\frac{2}{75}$	$\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$
$\frac{2}{77}$	$\frac{1}{44}+\frac{1}{308}$
$\frac{2}{79}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}$
$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{54}+\frac{1}{162}$
$\frac{2}{83}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}$
$\frac{2}{85}$	$\frac{1}{51}+\frac{1}{255}$
$\frac{2}{87}$	$\frac{1}{58}+\frac{1}{174}$
$\frac{2}{89}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}$
$\frac{2}{91}$	$\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$
$\frac{2}{93}$	$\frac{1}{62}+\frac{1}{186}$
$\frac{2}{95}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570}$
$\frac{2}{97}$	$\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$
$\frac{2}{99}$	$\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$
$\frac{2}{101}$	$\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$

No obstant no està clar quina era la forma com els egipcis construïen aquestes taules. Per això, els historiadors de la matemàtica han fet especulacions amb la intenció de buscar fórmules o mètodes que permetin explicar com aquestes havien estat elaborades (SÁNCHEZ PÉREZ, 1943).Val a dir que qualsevol fracció impròpia pot ser descomposta amb fraccions de numerador 1 o 2.

Per exemple :

$$\frac{5}{19} = \frac{1 + 2 + 2}{19}$$

Llavors, per convertir la fracció anterior en fraccions de numerador unitat només cal substituir les que hi hagi de numerador dos per la descomposició que apareix a la taula. i efectuar la reducció convenient.

C.B. Boyer va suggerir dues fórmules possibles (BOYER, 1986: 34) :

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\frac{2}{pq} = \frac{1}{p\frac{p+q}{2}} + \frac{1}{q\frac{p+q}{2}}$$

Ettore Bortolotti va suggerir el procediment empíric següent: Si volem descompondre la fracció 2/n i coneixem les descomposicions de totes les fraccions de denominador n_1 inferior a n, aleshores cal que agafem un n_1 superior a la meitat de n però inferior a ell $n/2 < n_1 < n$. Resulta que

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n_1}\right) = \frac{1}{n_1} + \left(2 - \frac{n}{n_1}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{2n_1 - n}{n_1} \cdot \frac{1}{n}$$

expressió de la qual només es desconeix la descomposició de

$$\frac{2n_1 - n}{n_1}$$

la qual és fàcil de trobar perquè hem partit de la base que totes les descomposicions de $2/n_1$ eren conegudes pels valors de n_1 inferiors a n.

Així:

$$\frac{2n_1 - n}{n_1} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots + \frac{1}{n_r}$$

i

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2 n} + \frac{1}{n_3 n} + \ldots + \frac{1}{n_r n}$$

Bortolotti afirma que totes les descomposicions de la taula del Papir de Rhind es poden obtenir aplicant aquest procediment (BORTOLOTTI, 1932: 137)

2.4.3. Addició de fraccions

La reducció a comú denominador de diverses fraccions era resolta pels egipcis sense considerar el m.c.m. dels denominadors sinó únicament el major d'ells i sense tenir en compte si aquest era múltiple dels altres denominadors. Això comportava que en algun cas s'obtinguessin numeradors no enters. Però això no els significava cap problema per a ells. Fossin o no enters, els egipcis escrivien els numeradors a sota de les fraccions, amb tinta d'altre color i després, si calia resoldre la suma de les fraccions sumaven aquests numeradors obtinguts. Finalment, descomponien el resultat en fraccions unitàries com era habitual.

Per exemple:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{20}, & \frac{1}{265}, & \frac{1}{530}, & \frac{1}{1060} & \\ (53) & (4) & (2) & (1) & (60) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{1}{20}+ & \frac{1}{114}+ & \frac{1}{228}+ & \frac{1}{18}+ & \frac{1}{36}+ & \frac{1}{342}+ & \frac{1}{684}+ & \frac{1}{24}+ & \frac{1}{48}+ & \frac{1}{456}+ & \frac{1}{912} & \\ (76) & (8) & (4) & \left(50\frac{2}{2}\right) & \left(25\frac{1}{3}\right) & \left(2\frac{2}{3}\right) & \left(1\frac{1}{3}\right) & (38) & (19) & (2) & (1) & (228) \end{array}$$

2.4.4. Subtracció de fraccions

Restar no era altra cosa que completar la suma fins a un valor determinat. Per exemple si es volia trobar el complement de $\frac{2}{3}+\frac{1}{15}$ respecte a la unitat, els egipcis procedien reduint a comú denominador i sumant les fraccions donades i després el numerador obtingut el restaven del denominador comú utilitzat. Per acabar, descomponien la fracció obtinguda en fraccions unitàries.

$$\begin{array}{cccc} \frac{2}{3} & \frac{1}{15} & & \\ (10) & (1) & Total\ (11) & residu\ (4) \end{array}$$

2.4.5. Multiplicació de fraccions

A l'Antic Egipte, la resolució de qualsevol tipus de multiplicació es feia pel mètode de la duplicació amb independència de les característiques dels factors a multiplicar. Per exemple, el producte 1/56 x 13 es feia així:

$$\begin{array}{l} \rightarrow\ 1\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{56} \\ \quad 2\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{28} \\ \rightarrow\ 4\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{14} \\ \rightarrow\ 8\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{7} \\ \text{---------------} \\ \quad 13\ldots\ldots\ldots\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{56} \end{array}$$

Aquest és un cas de multiplicació d'un enter per una fracció unitària. Ara bé si el que s'ha de multiplicar és una fracció unitària per una altra l'operació és molt més simple i es redueix a la multiplicació dels dos denominadors.

Al Papir de Rhind hi ha tot un seguit de problemes sota l'epígraf de *s´k´m´* (sekem) Son uns 14 problemes de multiplicacions de sumes de fraccions per una altra fracció o per una altra suma de fraccions amb la peculiaritat que en tots ells el multiplicand és sempre el mateix: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

2.4.6. Alguns problemes aritmètics

El Papir de Rhind, després de donar la taula de descomposició de fraccions, proposa la resolució d'uns exercicis de tipus aritmètic. Es tracta de vuitanta-quatre problemes que proporcionalitat i repartiments. Consisteixen en el repartiment de 1, 2, 6, 7, 8, 9 panets entre 10 persones i l'autor fa servir les taules de descomposició de fraccions per descompondre n/10.

El problema 45 proposa calcular el nombre de panets de pes 45 equivalents a 100 panets de pes 10 i el resol mitjançant la proporcionalitat:

$$\frac{100}{10}\times 45 = 450\,panets$$

El problema 63 planteja la distribució de 700 panets entre 4 persones de forma que guardin proporció amb 2/3, 1/2, 1/3, 1/4. La solució proposada consisteix en dividir 700 entre la suma de les fraccions anteriors:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = 1+\frac{3}{4}$$

i el resultat d'aquesta divisió multiplicar-lo respectivament per cada una d'aquestes fraccions.

Aquests exercicis mostren que els egipcis tenien un bon coneixement de la proporcionalitat entre quantitats.

2.5. Problemes algebraics

Al Papir de Rhind hi ha un conjunt de problemes que es designen amb el títol de *hau* que significa quantitat o munt i es tracta de problemes que avui resoldríem amb una equació i que els egipcis ho feien per un mètode similar a la falsa posició.

Així, el problema 24 diu:

Quin és el valor de hau si hau i un setè d'hau és igual a dinou.

La resolució que hi ha en el papir consisteix en suposar un valor per a hau, per exemple 7. Aleshores es calcula el resultat que donaria l'enunciat si hau tingués aquest valor

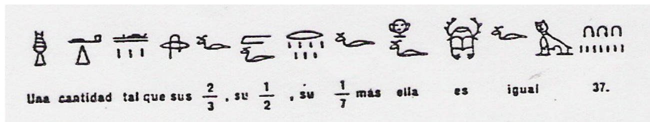
$$7+\frac{1}{7}\cdot 7 = 8$$

Però el resultat havia de ser 19. Llavors es planteja la pregunta de quina és la quantitat que multiplicada per 8 donaria 19 i s'obté que és:

$$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

Aquest resultat multiplicat per 7 és la solució de l'enunciat.

El problema 30 esta escrit en escriptura jeroglífica de la manera següent.



Es tracta d'un problema que avui plantejaríem com l'equació:

$$x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{7}x=37$$

i que els egipcis resolien amb una simple divisió:

$$37 \quad \textit{dividit per} \quad 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$$

i s'obté com a solució:

$$16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$$

Es tracta, doncs, d'uns exercicis que avui serien resolts mitjançant una equació i que els egipcis solucionaven amb mètodes aritmètics o de falsa posició.

2.6. Geometria

La geometria tenia un major pes a la civilització egípcia que a la babilònica però continuava estant molt lligada als problemes de tipus pràctic com el càlcul d'àrees.

2.6.1. Càlcul d'àrees

En el papir de Rhind hi ha alguns problemes de càlcul d'àrees. Així, el número 51 explica com calcular l'àrea d'un triangle isòsceles multiplicant la meitat de la base per l'alçada ho justifica amb la divisió del triangle en dos de rectangles iguals i aconsegueix així de formar un rectangle que tingui aquelles dimensions. Un altre problema, el número 62, proposa el càlcul de l'àrea d'un trapezi isòsceles de forma correcta. No obstant també hi ha documents on el resultat no s'obté de manera exacta sinó aproximada i per obtenir-la es fa servir alguna forma no correcta. En aquest sentit, hi ha una acta notarial apareguda a Idfu en la qual es calcula l'àrea d'un quadrilàter qualsevol multiplicant les mitjanes aritmètiques dels costats oposats, o la d'un triangle per la semisuma de dos costats per la meitat de l'altre. Es tracte de fórmules incorrectes però els resultats obtinguts donen unes aproximacions acceptables.

També és aproximada la manera de calcular l'àrea d'un cercle. El problema 48 serveix per veure el procediment que els egipcis utilitzaven per trobar aquesta àrea. Es tractava de calcular l'àrea d'un cercle de radi 9 unitats. Aleshores es parteix d'un quadrat de costat 9 i es construeix un octògon traient de cada vèrtex uns triangles rectangles de costat 4'5. L'exercici conclou calculant l'àrea d'aquest octògon i afirmant que aquesta no s'allunya gaire de l'àrea del cercle buscat.

$$9^2 - 4\left(4 + \frac{1}{2}\right) = 63$$

Un altre problema, el número 50, serveix per enunciar una regla: *L'àrea d'un camp circular de 9 unitats de diàmetre és igual a l'àrea d'un quadrat de 8 unitats de costat.* Aquesta afirmació ens suggereix un valor de π de $\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 4$ que aproximadament és de 3,16 que és una quantitat més ajustada que la que utilitzaven els babilònics.

A més, aquest enunciat ens explica un algorisme per trobar l'àrea del cercle que consistia en descomptar del diàmetre la seva novena part i multiplicar el resultat per ell mateix.

$$Area\ cercle = \left(D - \frac{D}{9}\right)^2 = D^2\left(\frac{8}{9}\right)^2$$

Aquesta correcció a través del novè dóna un resultat en l'exercici anterior bastant proper a l'àrea de l'octògon. Tanmateix, queden pendents algunes qüestions com la de saber com van escollir el valor de 9 per fer la reducció o si els egipcis eren coneixedor que el resultat de l'àrea obtingut era aproximat (FETTWEIS, 1931: 189).

2.6.2. Càlcul de volums

Dos exercicis apareguts en el Papir de Moscou serviran per il·lustrar aquesta part. El primer fa referència al càlcul del volum d'un tronc de piràmide de base quadrada. Conté un dibuix amb unes anotacions numèriques al costat:

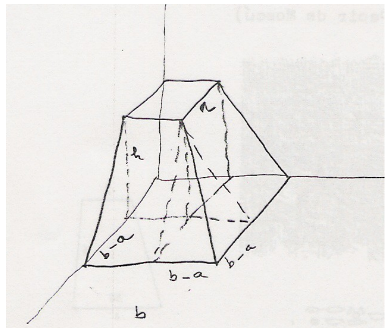
$$2^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 = 28$$

$$28 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 = 56$$

que han fet pensar que l'escriba va utilitzar una fórmula

$$v = h\frac{a^2 + b^2 + a \cdot b}{3}$$

en la qual *h* és l'altura i *a* i *b* els costats dels quadrats de les dues bases quadrades del tronc de piràmide.



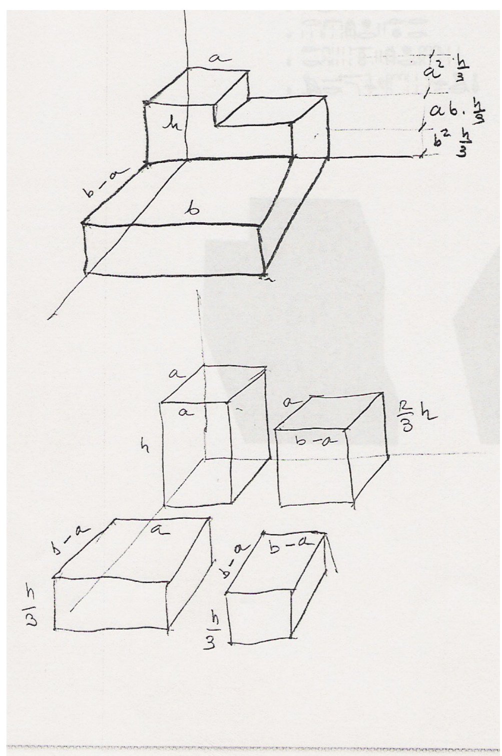
Boyer suggereix que l'autor, per arribar a aquesta fórmula, va haver de descompondre aquest volum en un paral·lelepípede, dos prismes i una piràmide:

Un paral·lelepípede rectangular de volum $b^2 \cdot h$

Dos prismes de volum $\dfrac{b\ (a - b)h}{2}$

Una piràmide de volum $\dfrac{(a - b)^2 \cdot h}{3}$

i convertir els prismes i la piràmide en paral·lelepípedes de volum equivalent. Així obtindria aquesta nova figura i la fórmula a aplicar (BOYER: 1986: 41).



El segon problema, que és el número 10 del mateix papir, fa el càlcul de la superfície d'una figura semblant a un cistell i que pot fer pensar que es tractava d'una cúpula, d'una semiesfera o potser de la teulada d'un graner.

La forma de càlcul recorda el procediment de càlcul de l'àrea del cercle pel mètode de reducció per un novè.

1. Calculaven el doble del diàmetre i li restaven un novè:

$$\left(2D - \frac{2D}{9}\right)$$

2. Prenien la novena part del resultat anterior i el restaven d'ell mateix:

$$\left(2D - \frac{2D}{9}\right) - \frac{1}{9}\left(2D - \frac{2D}{9}\right) = 2D\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2$$

3. El resultat obtingut el multiplicaven pel diàmetre:

$$2D^2\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2$$

Si suposem l'aproximació de $\pi = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 4$

$$\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

i això ens porta a:

$$2D^2\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 = 2D^2\frac{\pi}{4} = 2\pi R^2$$

que no és altra cosa que l'àrea d'una semiesfera.

Ara be, els egipcis només utilitzaven aquest esquema general de manera numèrica per a un valor particular de D= 4+1/2 i obtenien un resultat de 32.

2.6.3 Rudiments de trigonometria

Els egipcis empraven una raó trigonomètrica que era semblant al concepte actual de pendent. La relació rebia el nom de *seqt* i era el quocient entre la projecció horitzontal i la vertical. Vist en la perspectiva actual aquesta mesura be a ser una cotangent. Aquesta relació tenia una característica especial que consistia en què mentre que la unitat horitzontal era la mà, la vertical era el colze amb l'equivalència de 7 mans per colze. Així, el *seqt* es mesurava en mans per colze.

El problema 56 del Papir de Rhind calculava el *seqt* d'una piràmide de 250 colzes d'alçada i de base quadrada de costat 360. El procediment seguit consistia en dividir 360 entre 2 i el resultat obtingut, que era la meitat de la base, dividir-lo per 250 que és el valor de l'altura.

Així s'obté $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$. Ara bé, llavors els egipcis multiplicaven aquest valor per 7 perquè el resultat fos donat en mans per colze.

2.7. Conclusió

La característica de la ciència a l'Antic Egipte és l'estancament ja que, segons la documentació existent, al llarg dels diversos mil·lennis que va durar no es van produir gaires avenços remarcables. Tanmateix es pot afirmar que el concepte de nombre va ser assolit així con també l'ús generalitzat de les fraccions unitàries les quals perduraren a Grècia i a Roma i fins i tot durant alguns segles de l'Edat Mitjana.

Pel que fa als procediments de geometria cal destacar com a originalitat la contracció al novè per calcular l'àrea del cercle inscrit en un quadrat. Cal tenir en compte que aquest procés va tenir llarga implantació ja que apareix, també, en un manuscrit del segle XI de la forma següent: *Sigui un cercle qualsevol. Si l'escurcem un novè obtenim un segon cercle interior al primer. El quadrat circumscrit al cercle interior té una superfície igual al cercle donat.*

El fet que els mateixos exercicis apareguin repetits en diversos papirs ha fet creure que es tractaven de treballs de tipus escolar. Tanmateix l'escassetat de font primàries fa difícil obtenir unes conclusions més precises sobre aquesta cultura tant extensa en el temps com desconeguda.

3. L'EMPIRISME PREHEL·LÈNIC I EL MIRACLE GREC

En els dos capítols anteriors hem pogut veure la ciència que es va conrear a les civilitzacions anteriors a la grega i hem pogut observar que hi havia alguns trets comuns. La ciència a Babilònia i a Egipte sembla que no utilitzava ni les proves ni les demostracions i que el seu coneixement eren taules i dades observacionals. No es veuen, al menys de manera explícita, ni models teòrics ni models geomètrics. No hi ha, aparentment, elaboracions abstractes i els coneixements semblen solucions tècniques concretes i de curt abast.

Aquests trets van fer creure als estudiosos de la història de la ciència que les matemàtiques emprades eren eminentment empíriques. Avui aquesta afirmació està convenientment matisada ja que els anàlisis dels problemes evidentment empírics han mostrat que al darrera havia d'haver alguna mena de procediment que comportava un cert grau d'abstracció i que, tot i no ser explicitat, era conegut i aplicat.

Al voltant del segle VI aC. les cultures prehel·lèniques van viure una etapa molt fosca. Els pobles que havien aconseguit dominar el ferro com a arma de guerra anaven sotmetent els que encara no l'empraven correctament. Els conflictes bèl·lics que es van produir van ocasionar l'ocupació d'Egipte i de Mesopotàmia per les tropes perses i els conseqüents moviments de població. En aquest context és en el qual es va desenvolupar la cultura grega clàssica.

La ciència grega es caracteritza per construir models teòrics, per elaborar conceptes abstractes i per utilitzar demostracions i proves per certificar la validesa dels coneixements. Per això els historiadors van parlar del *miracle grec* i van tractar de buscar-hi justificacions de tipus polític, social o cultural. Es va afirmar que els grecs eren un poble més liberal i més lliure i que per aquest motiu van ser capaços d'establir una racionalitat pròpia.

En aquest sentit, el prestigiós historiador de la ciència grega, Tomas Heath, considerava que els grecs havien estat un poble amb un gran amor pel coneixement, més gran encara que el seu desig d'aventura. Com a exemples citava l'*Odisea*, obra en la qual el seu protagonista viatjava a diferents indrets per poder conèixer les ciutats i els homes i poder aprendre d'ells. Posteriorment va buscar a Ciclop també per conèixer quin tipus de persona era i quines característiques tenia. Al llarg de la història de la Grècia clàssica se sap que diversos científics van viatjar per poder aprendre. És el cas de les visites a Egipte de Tales o de Pitàgores. Aquest amor pel coneixement anà acompanyat d'unes capacitats innates d'observació que van quedar reflectides en les obres de medicina d'Hipòcrates o les de biologia d'Aristòtil. Aquestes constatacions van fer afirmar a Heath que els grecs eren una "raça de pensadors" ja que no sols tenien voluntat de conèixer sinó que cercaven el perquè i no s'aturaven fins que no disposaven d'una explicació racional

Es pensa, però, que una altra causa fonamental per explicar el desenvolupament científic grec hauria estat l'existència de l'esclavitud, inexistent en el sistema de producció asiàtic, la qual hauria donat lloc a una classes ociosa que es va poder dedicar únicament al conreu de la ciència. Entre les raons de tipus polític hi ha qui ha vist, també, en l'estructura de les polis i en el sistema de colonització metropolità la raó d'aquest miracle.

A tots aquests factors cal afegir una situació geogràfica privilegiada i el fet que el sistema alfabètic d'escriptura va incrementar el nombre de persones que van poder accedir a la cultura. Tanmateix no hi ha cap d'aquestes raons que per si sola permeti justificar el miracle grec.

Evidentment tant *l'empirisme prehel·lènic* com *el miracle grec* són uns clixés que no s'ajusten del tot be a la realitat ja que fins i tot la ciència prehel·lènica mostrava components de racionalitat (EVES, 1983) (REY PASTOR, 1985) (KLINE,1992) (LORIA, 1987) (EGGERS, 1995).

3.1. Àmbit geogràfic

Quan es parla de ciència grega es fa referència no sols a la ciència que es va fer a la península o a les illes sinó també a les colònies que els grecs posseïen a la Mediterrània.

Una distribució d'aquest espai geogràfic on va desenvolupar-se aquesta ciència la dóna el quadre següent:

Període	Àmbit geogràfic	Escoles o científics
600 aC. - 500 aC.	Colònies gregues a Àsia	Escola Jònica
550 aC. - 400 aC.	Colònies gregues a la Magna Grècia (Itàlia i Sicília)	Escola Pitagòrica Escola Eleàtica
500 aC. - 428 aC.	Península grega	Anaxàgores i Demòcrit
450 aC. - 420 aC.	Atenes	Sócrates, Plató i Aristòtil
320 aC. - 120 aC.	Alexandria (L'Antic Egipte dominat pels grecs)	Escola Alexandrina: Euclídes, Arquimedes i Apol.loni
segles I, II i III dC.	Grècia sotmesa a la dominació romana	Ptolemeu, Diofant, Pappos, Nicòmac de Gerasa.

3.2. Períodes de la ciència grega

La classificació per àmbits geogràfics, gairebé, també porta aparellada una classificació per períodes. Els sis-cents anys que abasta la ciència grega es pot dividir en tres grans etapes:

1. Període hel·lènic que abasta des del 600 aC. fins a la mort d'Alexandre el Gran el 323 a C. Aquests tres-cents anys es poden repartir en tres etapes en funció de les escoles que hi van haver:

a) Al voltant del segle VI en el qual van destacar dues escoles: l'Escola Jònica amb Tales de Milet al cap davant i l'Escola Pitagòrica amb Pitàgores de Samos com a fundador.

b) L'Edat heroica (segles V i IV aC.), en la qual van ressaltar les Escoles Eleàtica i Atomista i on hi van destacar: Arquítes, Demòcrit, Hipies, Hipòcrates de Quios, Anaxàgores i Zenó.

c) Època de Plató i Aristòtil. En la qual s'observa el món amb criteris científics. Hi van destacar com a matemàtics, Èudox, Menecmo, Dinostrat.

2. Període Hel·lenístic que abasta des del 323 aC. fins el segle I dC. En aquest període cal destacar la fundació el 332 del Museu i de la Biblioteca d'Alexandria. El Museu era una institució docent i de recerca encaminada a les ciències exactes i naturals. Entre els científics destacats es troben Euclides, Arquimedes i Apol·loni. Aquest període ha estat anomenat, també, *l'Edat del llibre de text* per la quantitat d'obres de síntesi i recopilació que es van fer.

3. Període Greco-romà que abasta els tres primers segles de l'era actual (segles I, II i III dC.). En aquesta època es produeixen una considerable quantitats d'obres que són comentaris de les

obres dels autors grecs més antics. Tanmateix hi ha algunes excepcions on les obres produïdes són originals. És el cas de Pappos, Ptolemeu, Diofant i Heró. En el segle I destaca Nicòmac de Gerasa matemàtic neopitagòric que va ser autor d'una *Aritmètica* que fou utilitzada com a llibre de text durant tota l'Edat Mitjana i Menelau que va escriure *Esfèriques.*

Entre els comentaristes més importants hi trobem Proclo que fou autor d'un *Comentari als Elements d'Euclides* i Eutoci que va escriure un *Comentari als escrits d'Arquimedes.* Uns altres comentaristes també destacats van ser: Teó d'Esmirna, Jamblic i Domnino de Larisa.

3.3. Fonts

Les obres gregues que es conserven són primordialment còpies, fragments o referències d'autors posteriors que constitueixen el que s'anomena fonts secundàries. Pel que fa a les fonts primàries únicament es conserven aquelles que es van produir després del segle IV aC. i a través de textos que són còpies dels originals.

3.3.1. Fonts primàries

En el quadre següent hi figuren aquelles obres que ens han pervingut encara que hagi estat a través de còpies posteriors (SÁNCHEZ NAVARRO, 1991:51).

Període	**Autor**	**Obra**
IV a III aC.	AUTOLIC DE PITANE	Llibre sobre la discussió de geometria esfèrica amb Èudox.
III aC.	EUCLIDES	*Els Elements*
	APOL·LONI	*Les còniques*
	ARQUIMEDES	*Sobre l'esfera i el cilindre*
		Sobre els cossos flotants
		La mesura del cercle
		El Mètode
II aC	HIPSICLES D'ALEXANDRIA	*Sobre els políedres regulars*
	TEODOSI DE BITINA	*L'Esfèrica*
I dC.	NICÒMAC DE GERASA	*L'Aritmètica*
	HERÓ D'ALEXANDRIA	*La Mecànica*
		La Catóptrica
II dC.	PTOLEMEU	*La Sintaxi Matemàtica (l'Almagest)*
		La Geografia
		L'Òptica
III dC	DIOFANT	*L'Aritmètica*

Pel que fa a les fonts secundàries hi ha una gran varietat, cosa que permet distingir entre:

1. Els **comentaris** be siguin resums o que continguin fragments literals amb notes,

afegits, discussions o anàlisis diversos. Aquesta és la font més abundant.

2. Els **extractes o resums** d'obres combinats amb dades biogràfiques dels autors dels textos extractats. Com per exemple l'obra de Diògenes Laerci sobre Pitàgores
3. Els **fragments citats literalment** que s'utilitzen per recolzar una discussió, D'aquests únicament es conserven d'autors posteriors al segle IV aC. i els més freqüents son els fragments d'Aristòtil
4. **Referències** a autors i títols que es troben a les obres d'alguns historiadors com per exemple Plutarc.

En el quadre següent recollim els comentaris més destacats.

Període	Autor	Obra
IV aC.	TEUDI	*Sobre els elements de matemàtiques anteriors a Euclides*
	LLEÓ DE MAGNÈSIA	*Compilació de matemàtiques*
	EUDEM DE RODES	*Història de l'Aritmètica, l'Astronomia i la Geometria* (Només es conserva un fragment dedicat a l'estudi de les lúnules d'HIPÒCRATES)
II aC.	CRATES DE TARSO	*Comentaris de Plató*
I aC.	ANDRONIC DE RODES	*Comentari d'Aristòtil i Teofrast*
	CLEOMEDES	*Tractat d'Astronomia amb comentaris d'Eratostenes i Posidoni*
	DIODOR SICUL	*Compilació històrica* (desapareguda)
II dC.	ALEXANDRE D'AFRODÍSIA	*Comentaris d'Aristòtil*
	AMMONIO SACCAS	*Comentari sobre Plató*
III dC.	SEXTUS EMPÍRICUS	*Hypotiposes* (compendi de filosofia i ciència)
	DIÒGENES LAERCI	*Historia de la filosofia grega*
	PORFIRI	*Comentari d'Aristòtil*
		Biografia de Pitàgores
IV dC.	JAMBLIC	*Comentari sobre Nicòmac de Gerasa*
	PAPUS D'ALEXANDRIA	*Col·lecció matemàtica*
	SERÈ D'ANTINÓPOLIS	*Comentaris d'Apol.loni*
	TEÓ D'ALEXANDRIA	*Comentari a l'Almagest*
		Comentari als Elements
V dC.	HIPATIA	*Comentari a l'Almagest*
		Comentari a Apol.loni
		Comentari a Diofant
	PROCLO	*Comentari a Aristòtil*
		Comentari al llibre I dels Elements
VI dC.	EUTOCI	*Comentari sobre Euclides*
	SERGI DE RESAINA	*Comentaris sobre Aristòtil*
	SIMPLICI	*Comentaris sobre Aristòtil*
	HERMIAS	*Comentaris sobre Aristòtil*
	FILOPÓ	*Comentaris sobre Aristòtil*
		Comentari sobre Nicòmac
	BOECI	Traducció al llatí de les obres d'Aristòtil
		Traducció al llatí de l'obra de Nicòmac de Gerasa

Les fonts secundàries informen sobre les obres dels autors més destacats que han desaparegut. El quadre següent fa un breu esment.

Període	Autor	Temàtica sobre la que van escriure
abans s. VI aC.	TALES	
	PITÀGORES	
V aC.	TEODOR DE CIRENE	Els incommensurables
	HIPIES	Trisecció de l'angle
	HIPOCRATES DE QUIOS	Sobre lúnules
IV aC	DINÒSTRAT	Trisecció de l'angle
	ARQUITES	Duplicació del cub
	TEETET	Sòlids regulars
	ÈUDOX	Exhaustió i Astronomia
	CALIPO	Astronomia
	MENECMO	Còniques
	TEUDI I LLEÓ DE MAGNÈSIA	Geometria
	ARISTEU	Còniques
III aC	ERATÒSTENES	Dimensió de la Terra
	ARISTARC	Sistema heliocèntric
	HERÀCLIDES PONTIC	Astronomia
	CONON DE SAMOS	Còniques
	NICOTELES	Còniques
II i I aC.	POSIDONI	Dimensió de la Terra
	HIPARC	Epicicles i excèntriques
	ZENODOR	
	DIONISIODOR	
	NICOMEDES	Concoide, duplicació del cub i trisecció de l'angle
	PERSEO	
	MENELAU	Trigonometria esfèrica

3.4. L'aritmètica grega

A l'Antiga Grècia, el terme Aritmètica tenia un significat diferent del que té en l'actualitat. Els grecs entenien per Aritmètica aquells temes que avui encabiríem dins d'una teoria de nombres. Es a dir: classificació dels nombres, teoria de la divisibilitat i propietats dels nombres. A més, també, incloïen les proporcions, les progressions i les regles de tres. En canvi, no consideraven com a part de l'Aritmètica: la numeració, els algorismes de sumar, restar, multiplicar i dividir, la potenciació i la radicació, les aproximacions, el càlcul amb fraccions que formaven part d'una altra branca de les matemàtiques anomenada Logística.

La Logística o càlcul de nombres era la part més pràctica i menys valorada mentre que l'Aritmètica era la part més teòrica. Era doncs la matèria de preparació per a la ciència veritable. La Logística comprenia les operacions bàsiques, les fraccions, els problemes sobre coses, els de repartiments, de pesos, els d'equacions simples o de falsa posició etc. Eren problemes que atribuïen als nombres el nom de l'objecte a mesurar. Dins de la Logística s'incloïa l'onomatomància i els quadrats màgics. La primera s'ocupava de l'endevinació del futur amb els nombres associats als noms i a les paraules, mentre que la segona consistia en la disposició dels nombres en forma de quadrats de manera que s'acomplissin determinades propietats.

Solament en Diofant, la Logística apareix incorporada a la seva obra *Aritmètica* però això és degut a que aquest autor sabia que els problemes de mesures de vi o de dracmes podien ser tractats de forma general sense referir-se a cap nombre concret i per això els va incorporar a la ciència abstracta.

3.5. La numeració parlada

Els numerals grecs rebien un nom particular

1= eis
2= duo
3= treis
4= tessares o tettares
5= pente
6= ex
7= epta
8= octo
9= ennea
10=deca

Les desenes següents es formaven segona la regla:

arrel de la unitat + cai ($\chi\alpha\iota$) + deca

La partícula cai = i no sempre es posava. Així

11= endeca

12= dodeca
.....
19= enneacaideca

A partir de dinou es procedia de manera similars per als altres nombres tenen en compte que les desenes s'anomenaven:

20= eicosi
30= triaconta
40= tettaraconta o tessaraconta
50= pentaconta
....
90= eneneconta
100= ecaton

Els nombres en cada desena es formaven segons alguna de les tres regles següent:

1) **unitat + cai + desenes**

21= encaieicosi
35= pentacaitriaconta
87= eptacaioctoconta

2) **desenes + cai + unitats**

25= eicosicaipente
37= triacontacaiepta

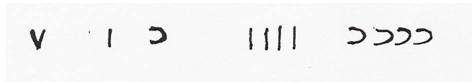
3) Sense fer servir el nexe d'unio **cai**. Aleshores sempre cal posar les desenes davant de les unitats.

25= eicosipente
37= triacontaepta

Amb aquestes normes es podia arribar a nomenar tots els nombres fins el 999. El 1000 s'anomenava Jilioi o Kilioi i el 10.000, Myrioi. Aquests dos noms permetien designar fins el 999.999. Aquest ja era un nombre tan gran que els grecs no necessitaren posar, si més no durant els primers anys, nom a quantitats majors que aquesta.

3.6. La numeració escrita

Els símbols utilitzat per representar els nombres van anar evolucionant des dels que s'utilitzaren en èpoques més antigues fins que finalment es van anar imposant. Els primers documents amb numeració escrita són uns documents descoberts a Minos i es tracta d'uns jeroglífics que mostren una forta influència egípcia.



¼ 1 1 4 4

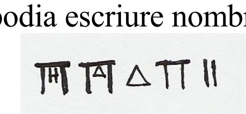
10 50 200 200 1.000

Abans del segle VI aC. es va començar a utilitzar símbols que eren les inicials de les lletres majúscules

1 10 100 1.000 10.000

5 50 500 5.000 50.000

Amb aquests símbols es podia escriure nombres com 567:



També s’han trobat algunes variacions paleogràfiques que consistien en emprar la lletra Γ en lloc de Π . Així:

5 50 500 700 5.000 7.000 50.000

Cap el 403 aC els grecs ja utilitzaven l’alfabet d’origen jònic en l’escriptura. Aquest alfabet consistia en vint-i-quatre lletres (SÁNCHEZ PÉREZ, 1946:
185)

Α	α	*alfa*
Β	β	*beta*
Γ	γ	*gamma*
Δ	δ	*delta*
Ε	ε	*epsilon*
Ζ	ζ	*dzeta*
Η	η	*eta*
Θ	θ	*theta*
Ι	ι	*iota*
Κ	κ	*kappa*
Λ	λ	*lambda*
Μ	μ	*mi*
Ν	ν	*ni*
Ξ	ξ	*ksi*
Ο	o	*omicron*
Π	π	*pi*
Ρ	ρ	*ro*
Σ	σ	*sigma*
Τ	τ	*tau*
Υ	υ	*ipsilon*
Φ	φ	*fi*
Χ	χ	*khi*
Ψ	ψ	*psi*
Ω	ϖ	*omega*

Amb aquestes lletres i tres símbols més anomenats episemes, els grecs van format el nous símbols del sistema de numeració. Se sap que les primeres monedes que van emprar aquests símbols van aparèixer al voltant del 266 aC.

stigma coppa sampi

Els nombres formats amb les vint-i-quatre lletres i els tres episemes van ser els següents:

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
ξ	o	π	ϙ	ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	ϡ	
60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	

Resulta evident que si dins d'un text es posava un nombre calia assenyalar-ho perquè qui ho llegís sabés que no es tractava d'una paraula. Això es feia col·locant una ratlla horitzontal a sobre del número.

Les lletres de l'alfabet i els episemes permetien representar nombres fins al 999. Si es volia representar nombres del 1.000 al 999.999 es feien servir el mateixos símbols però es posava una coma al davant. Així:

$$256.430= \overline{,\alpha\ ,\nu\ ,\zeta\ \upsilon\ \lambda}$$

Des del 1.000.000 en endavant, també s'utilitzava el mateix alfabet però calia posar dos puntets a sobre de la lletra:

$$10.000=\ddot{\alpha}$$

$$8.000.000=\ddot{\omega}$$

Es tracta de les miríades. Però si el que es volia eren xifres més grans es podia fer servir els milers de miríades o les miríades de miríades afegint, respectivament una coma al davant de les miríades o dues vegades dos punts. Així

$$500.000.000= ,\ddot{\nu}$$

$$70.000.000.000= \ddot{\ddot{\psi}}$$

Resulta evident que el complicat sistema de puntets a sobre de la lletra i de comes al davant permetia la representació de quantitats molt grans.

3.7. Curiositats numèriques

La numeració grega no necessitava cap símbol especial per representar el zero o absència d'unitats. A més, el fet que nombres i lletres empressin els mateixos símbols feia que algunes paraules tinguessin valor mnemotècnic ja que servien per recordar alguns nombres. Així, es deia que l'any tenia neilos dies $(\nu\varepsilon\iota\lambda o\sigma)$

$$\nu + \varepsilon + \iota + \lambda + o + \sigma = 50+ 5+ 10+ 3+ 70+ 200= 365$$

Ja hem dit abans que les necessitats de la vida quotidiana dels grecs no requeria l'ús de nombres massa grans. Tanmateix, alguns matemàtics van especular sobre aquestes quantitats. Un d'ells va ser Jenòcrates de Calcedònia i l'altre Arquímedes.

Jenocrates va trobar que els nombres de síl·labes que es podien formar amb les lletres de l'alfabet podia ser de l'ordre d'un bilió dos mil milions.

Arquímedes va escriure un tractat sobre els grans nombres en el que recollia dos d'importants: el nombre de l'arenari i el nombre dels bous.

El nombre de l'arenari era el nombre de grans de sorra que contindria l'esfera de les estrelles fixes que va considerar que era de l'ordre de 10^{8x64} és a dir un nombre de 512 xifres.

El nombre dels bous que pasturen al Sol sabent que n'hi havia de quatre colors i que també hi havia bous i vedelles era de l'ordre de $7.766 \times 10^{206.541}$

Evidentment per representar aquestes xifres Arquímedes va haver d'inventar un sistema de representació basat en les octades o grups de vuit.

La notació relativa als grans nombre va quedar reduïda a problemes específics i va ser diferents segons la autors. Així, Aristarc de Samos representava la miriades amb un símbol especial M a sobre del qual col·locava la quantitat de miriades que volia escriure. Així:

$$20.000 = \overset{\beta}{\mathrm{M}}$$

$$7175\,5875 = \overset{,\zeta\rho o\varepsilon}{\mathrm{M}}\ ,\varepsilon\omega o\varepsilon$$

En canvi Diofant utilitzava una altra manera per representar aquestes quantitats. Feia servir el símbol M amb una Y a sobre que col·locava davant del número a continuació escrivia la quantitat de miriades seguides separades per un punt de la resta dels milers.

$$150\,7784 = \overset{\mathrm{Y}}{\mathrm{M}}\ \rho\nu\ \cdot ,\zeta\psi\pi\delta$$

Heró, per la seva banda utilitzava la notació dels dos punts per indicar les miriades encara que en altres ocasions escrivia la paraula de miriades per deixar clar que es tractava d'aquestes quantitats.

$$18572 = \ddot{\alpha}\ ,\eta\phi o\beta$$

$$2278\,0712 = \underset{\textit{miriades}}{\mu\nu\rho\iota\alpha\delta\varepsilon\varsigma}\quad \underset{2278}{,\beta\sigma o\eta}\ \underset{i}{\kappa\alpha\iota}\ \underset{712}{\psi\iota\beta}$$

Per a representar nombres més grans que les miriades se solia utilitzar potències de les miriades. Així, Diofant utilitzava la primera miriada com hem vist abans amb el símbol $\overset{\mathrm{Y}}{\mathrm{M}}$ per representar quantitats fins 9999.9999 i la segona miriada per quantitats fins 9999.9999.9999 amb el símbol $\mathrm{M}\ \overset{\mathrm{Y}}{\mathrm{M}}$. Així,

$$16\,2858\,6560 = \mathrm{M}\ \overset{\mathrm{Y}}{\mathrm{M}}\ \iota\varsigma\ \overset{\mathrm{Y}}{\mathrm{M}}\ ,\beta\varpi\nu\eta\ \overset{\mathrm{O}}{\mathrm{M}}\ ,\varsigma\phi\xi$$

Observis que s'utilitzava un altre símbol per distingir les primeres miriades de les unitats que consistia en una M amb una *o* a sobre.

Apol·loni va utilitzar el mateix sistema que Diofant solament hi va canviar la denominació. Així parla de tetrades per indicar els conjunts de quatre dígits, miriades simples les quantitats de l'ordre dels 10.000, miriades dobles les de l'ordre de 10.000^2, triples, de 10.000^3, etc. Els símbols també són diferents, $\mu^{\alpha}, \mu^{\beta}, \mu^{\gamma}$ respectivament per cada una de les miriades abans indicades. Així,

$$5462\ 3600\ 6400\ 0000 = \overset{\gamma}{\mu}\ ,\varepsilon\nu\xi\beta\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\beta}{\mu}\ ,\gamma\chi\ \kappa\alpha\iota\ \overset{\alpha}{\mu}\ ,\varsigma\nu$$

Arquímedes en canvi va idear un nou mètode per representar basat en octades que es distribuïen en ordres i períodes

3.8. Operacions aritmètiques

Els grecs disposaven de diverses taules per efectuar les sumes i les restes. En particulars se sap que hi havia unes 35 diferents. La forma de sumar i restar no era diferent de l'actual com es veu en l'exemple.

$,\varsigma\ ,\mu\ ,\zeta\ ,\gamma\omega\chi\alpha$	6.473.921
$,\xi\ ,\eta\nu$	608.400
– – – – – – – –	– – – – – –
$,\zeta\ ,\eta\ ,\beta\tau\chi\alpha$	7.082.321

$\ddot{\theta}\ ,\gamma\chi\lambda\varsigma$	93.636
$\ddot{\beta}\ ,\gamma\upsilon\theta$	23.409
– – – –	– – – – – –
$\ddot{\zeta}\ ,\sigma\chi\zeta$	70.227

També hi havia taules de multiplicar. Per a efectuar les multiplicacions i les divisions ho feien de manera molt similar a l'actualitat. Per indicar la multiplicació de dos nombres interposaven entre ells el símbol $\varepsilon\pi$. L'exemple següent mostra una divisió:

$,\gamma\upsilon\mu\zeta$	$\nu\beta$	3.000 + 400 + 40 + 7	50 + 2
$,\gamma\iota\chi$	$\xi\zeta$	3.000 + 100 + 20	60 + 6
– – – –		– – – – – – – – – – – – –	
$\varsigma\chi\zeta$		300 + 20 + 7	
$\varsigma\iota\beta$		300 + 10 + 2	
– – – –		– – – – – – – – –	
$\iota\varepsilon$		10 + 5	

4. LA SECTA PITAGÒRICA

Al voltant del segle VI aC, en l'entorn cultural d'influència grega va haver-hi un renaixement religiós. Aparegueren comunitats que deien trobar-se en possessió de revelacions divines. Un d'aquest corrents fou l'orfisme que consistia en canviar el culte als deus de l'Olimp per l'advocació a Dionís. Aquest deu estava relacionat amb les festes de la fecunditat vegetal i amb el vi. Tant Dionís com Orfeu eren dos deus que havien mort esquarterats però havien renascut. Era per això que els seus seguidors creien en la reencarnació de les ànimes.

Els seguidors d'aquests corrents religiosos s'agruparen en germandats que duien una vida en comunitat i compartien els secrets. Una de les sectes més coneguda va ser la pitagòrica de la qual en fou fundador Pitàgores.

La imatge que tenim avui de Pitàgores (570aC - 500aC.) es correspon més amb la llegenda que amb la realitat. Per tant no és exagerat afirmar que es tracta més d'un personatge construït al llarg dels anys que d'un personatge real ja que les biografies es fan més grans a mesura que hom s'allunya del seu temps. Així, del segle V aC es conserven únicament dos fragments d'Heràclit, un de Io de Quios, quatre versos de Xenòfanes, sis d'Empèdocles i tres passatges d'Heròdot. En canvi en èpoques posteriors les dimensions de les biografies augmenta. Al segle I aC hi trobem les d'Aristoxen, Dicearc, Polibi, Diodor i Estrabó. Al segle III i IV dC. es conserven tres voluminoses biografies de Diògenes Laerci, Porfiri i Iàmblic.

Ara bé, les úniques dades que podem afirmar amb certesa és que Pitàgores va néixer a Samos el 570 aC., que al 530, amb quaranta anys d'edat va fugir de la tirania de Polícrates, que va viatjar per diversos països entre ells Jònia, Egipte i Mesopotàmia i que al 520 es va establir a Crotona a la Magna Grècia (la península itàlica) i allí va fundar una secta que va cultivar les matemàtiques. Al 500 aC. va morir.

No hi ha acord entre els biògrafs sobre si Pitàgores va escriure algun llibre, ja que mentre Heràclit i Io afirmen que ho va fer, Aristoxen i Dicearc ho neguen.

La secta pitagòrica tenia unes normes molt precises que podia ser considerades com un estil de vida. Els qui hi formaven part aspiraven a la santedat i per aconseguir-la havien de fer exercicis ascètics, havien de vestir pobrament i anar descalços. La roba que utilitzessin no podia ser de llana i tenien prohibit de menjar carn, peix i faves i de veure vi. Però la forma més eficaç per arribar a ser sant era a través del coneixement matemàtic ja que, creien que, aquest els apropava a Deu.

En el camp de les creences cal dir que els pitagòrics creien que l'ànima era immortal i que existia la reencarnació. Això els portava a respectar tot ésser vivent ja que podia ser reencarnació de qualsevol ésser i a creure que, res era nou sinó que tot es repetia.

Els pitagòrics van intervenir en el govern de la ciutat de Crotona i per això van patir diverses persecucions. Les seves idees polítiques es podien designar com de conservadorisme aristocràtic i estaven enfrontades amb els corrents democràtics que poc a poc anaven aconseguint més seguidors. En una de les ocasions es parla que Pitàgores va haver de fugir al Metaponto a causa d'una de les persecucions. D'altres biògrafs afirmen que va morir durant la persecució en trobar-se acorralat pels perseguidor i per un camp de faves que no es va veure en cor de creuar a causa de la prohibició de la seva secta. Tanmateix, sembla més versemblant que morís a causa de la seva avançada edat o a causa d'alguna malaltia com el *mal del poll*.

La llegenda de la seva mort com a màrtir va incrementar la seva mitificació i va augmentar el seu prestigi. Els seguidors, que es van veure obligats a fugir van difondre les creences a d'altres països, alhora que començava la decadència del pitagorisme com a grup o secta.

Entre els membres més destacats de la secta pitagòrica es troben: Hipàs (450aC.- 410aC.), Filolau (aprox. 470 aC.) i Arquites (400 aC.). A més les idees pitagòriques van tenir influència en altres personatges d'aquella època i d'èpoques posteriors. Entre ells hi ha Parmènides i Zenó del segle V aC., els neoplatònics del segle I dC, i Plotí i Procle del segle III dC. (GONZÁLEZ URBANEJA, 2001) (LORIA,1987).

4.1. El coneixement matemàtic

Pels pitagòrics el desig de purificació i de salvació, d'esdevenir sant, estava directament lligat amb el coneixement científic. Així, el desig de purificar-se era sinònim de desig de conèixer i es concretava en l'aprenentatge de les matemàtiques. D'aquesta manera la ciència va esdevenir valuosa per ella mateixa ja que servia per obtenir la santedat.

Ara bé, el coneixement matemàtic es basava en uns principis filosòfics. El primer d'ells consistia a creure que els nombres constituïen l'essència de les coses i eren immanents a elles. Val a dir que en el mon grec clàssic era habitual preguntar-se per les causes de totes les coses. Tales considerava que la causa era l'aigua, Anaximandre, la matèria i Anaxímenes, l'aire. Els pitagòrics, en canvi, creien que, en ser innats a la matèria, els nombres constituïen la causa de totes les coses.

Aquest principi filosòfic va tenir com a conseqüència que s'iniciés l'estudi quantitatiu de la natura buscant les relacions matemàtiques, regles i lleis que existien en ella i que constituïen la seva pròpia essència. A més s'inicià el misticisme dels nombres anomenat numerologia, ja que creien que entendre els nombres ajudava a entendre millor la natura.

Una de les valuoses troballes atribuïdes als pitagòrics és la descoberta de les harmonies musicals. Un relat de Boeci (s.VI dC.) ens assabenta del procés casual d'aquesta descoberta.

> "Pitágoras, obsesionado por el problema de explicarse matemáticamente los intervalos fijos de la escala, acertó a pasar, por la gracia de Dios, frente a una herrería; le llamo la atención la musicalidad de los golpes de los martillos sobre el yunque. Fue irresistible la oportunidad que se le ofrecía de analizar el problema en otras condiciones. Entró y observó largamente. Pensó que las diferentes notas fueran proporcionales a las fuerzas de los hombres. "No querrían intercambiar los martillos?" se evidenció el error de su idea primera, pues el resultado fue el mismo. La explicación debía estar en los martillos, no en los hombres.
>
> Se utilizaban cinco martillos, "¿se le permitiría pesarlos?" ¡Oh! ¡Milagro de los milagros! El peso de cuatro de ellos estaba en la proporción de 12, 9, 8, y 6. El quinto, cuyo peso no correspondía a relación numérica alguna con el resto era el que echaba a perder la perfección del repiqueteo. Fue retirado, y Pitágoras volvió a escuchar. En efecto, el mayor de los martillos, cuyo peso era doble del más pequeño daba la octava más baja. La doctrina de la media aritmética y armónica le dio la clave del hecho de que los otros dos martillos dieran las notas fijas de la escala. Dios quiso, seguramente, que pasara frente a la herrería. Fue corriendo a casa a continuar los experimentos, ahora en condiciones que podríamos llamar de laboratorio". (FARRINGTON, 1979: 46)

És evident que la història que explica Boeci està molt influïda per la realitat històrica de l'Edat Mitjana i que està lluny del context històric de la Grècia Clàssica, però això no impedeix que Pitàgores o els seus seguidors s'interessessin per les harmonies musicals. Iàmblic explica que Pitàgores havia après dels babilònics la sèrie numèrica 6, 8, 9, 12 en la qual es troben les relacions entre el to i la octava, la quarta i la cinquena.

6 : 12 és la relació entre el to i la octava
9 : 12 és la relació entre el to i la quarta
8 : 12 és la relació entre el to i la cinquena

Aquestes raons es mantenen amb independència que les notes siguin produïdes per cordes o per columnes d'aire. Molt possiblement, el descobriment de les relacions musicals va fer creure als pitagòrics que a la natura hi havia una harmonia matemàtica i que mitjançant el seu coneixement arribarien a comprendre quina era l'estructura fonamental del Cosmos. Així, Hipàs de Metaponto va estudiar l'harmonia en els instruments unidimensionals com, per exemple, les cordes i Arquites va provar que la intensitat del so era proporcional a la velocitat del moviment.

Els pitagòrics van creure que hi havia una musicalitat celest, que cada astre duia associada una música no perceptible pels que hi viuen al seu interior. Per això hom diu que té influència pitagòrica o que considera la natura amb orientació pitagòrica aquella persona que creu que a la natura hi és present una harmonia matemàtica.

4.2. Els nombres i la seva classificació

A l'Escola Pitagòrica es va formar l'Aritmètica però també l'Aritmologia o ciència que s'ocupava de les propietats místiques o cabalístiques dels nombres. Així, els pitagòrics consideraven que l'u representava l'ésser aïllat, l'indivisible. No creien que fos ben be un número sinó més aviat la separació entre els enters i els fraccionaris, ja que gaudia de les propietats dels altres números i amb ell es podien fer diverses operacions. Però, en la multiplicació, la divisió i la potenciació sempre tornava a donar ell mateix. També li deien *mónada* i era considerat com Deu, com el principi de totes les coses.

El dos era considerat com el primer dels nombres naturals i el primer dels nombres parells. S'anomenava *primer creixent* i representava la matèria i el principi femení. Com tots els nombres parells se'l considerava imperfecte.

El tres era considerat com un nombre sagrat i era venerat des de les cultures egípcia i mesopotàmica perquè tenia principi mig i final. Aquesta devoció es reflectia en els càntics que molt sovint s'havien de repetir tres vegades. Representava el principi masculí i era considerat com l'harmonia perfecta.

El quatre representava la llei universal, el destí inexorable. Tenia naturalesa sòlida perquè podia ocupar els quatre vèrtex del tetràedre. Primer dels nombres quadrats representava la vida animal.

El cinc era la suma del dos i del tres i per això comprenia les dues espècies: mascle i femella. Era el menor nombre el quadrat del qual és suma de quadrats ($5^2=4^2+3^2$). Simbolitzava els color i participava en l'emblema dels pitagòrics ja que el seu símbol era el pentàgon estrellat. Teó d'Esmirna va suggerir un quadrat màgic que posava de relleu les propietats del 5 com a mitjana de nombres extrems.

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \delta & \zeta \\ \beta & \varepsilon & \eta \\ \gamma & \varsigma & \theta \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}$$

El sis, primer dels nombres perfectes, era també el primer dels nombres pitagòrics de la música. Representava la funció de la vida animada. El set representava l'edat de l'home i era considerat com la raó, la salut i la llum i de vegades se l'anomenava Minerva. El vuit tenia influència en l'Univers ja que hi havia vuit esferes. El nou representava l'amor ja que nou eren els mesos de la gestació. I, el deu anomenat també cercle i límit dels nombres i representava la perfecció. La suma 1+2+3+4=10 rebia en nom de *Tetractis.*

Les aritmètiques pitagòriques classifiquen els nombres de diverses maneres. Primer parlen de nombre **iguals** i **desiguals** i aquests en **majors** i **menors**. Aleshores si es divideixen dos nombres desiguals i la divisió és exacta al major se li diu **múltiple** i al menor **divisor**. Això condueix a definir els nombres **primers** com aquells que no admeten divisió exacta per cap altre nombre que ell i la unitat.

Una segona classificació dels nombres és la de **parells** i **senars**. Aquests darrers també es deien gnomònics ja que representats per punts adopten la forma d'un gnòmon.

1 • • •
3 • • •
5 • • •

Ambdós es podien subdividir en nombres **parellament parells**, nombres **senarment parells**, nombres **parellament senars** i nombres **senarment senars**.

Els parellament parells admetien dos interpretacions o es considerava que la seva meitat era sempre parell, cosa que volia dir que es podia dividir per dos tantes vegades com es volgués (la fórmula general seria 2^n) i que la seva meitat sempre seria parell o que en dividir per dos algunes vegades la seva meitat era parell, encara que no ho fos sempre. Aquesta interpretació respon a la fórmula $(2^n(2k-1))$.

Els senarment parells eren aquells que es podien dividir per dos i donava un nombre senar $(2(2k+1))$ i els parellament senars, els que podien ser dividits per un senar i donava un parell ($2^n(2k+1)p$ amb $n>1$, $\forall$ p).

Finalment, els senarment senars eren aquells que no tenien més divisors que els senars i, aleshores la seva fórmula seria $(2k+1)^n$.

Durant l'Edat Mitjana aquesta classificació va tenir difusió sota els noms llatins de *Parinter par, Imparinter par, Parinter par, Imparinter impar.*

Una tercera classificació correspon als nombres compostos, és a dir els no primers, que agrupa en **perfectes**, **deficients**, **abundants** i **amics**.

Es diuen nombres perfectes aquells que són iguals a la suma dels seus divisors. A l'època d'Euclides es coneixien dos d'aquests nombres el 6 i el 28 ja que 6= 1+2+3 i 28=1+2+4+7+14. A l'època de Nicòmac es van afegir dos més: el 496 i el 8.128. Cal observar que tots ells responen a la forma general

$$2^{n-1}(2^n-1) \text{ per algun } n.$$

Els quatre nombres perfectes anteriors responen a la fórmula per a valors de n=2,3,5,7.

Al segle XV es va descobrir un altre nombre perfecte. Es tracta del que correspon al valor n=13:

$$33.550.336 = 2^{12}(2^{13}-1)$$

Cataldi (1548-1626) va trobar-ne els dos següents que corresponen a n=17, n=19:

$$8.589.869.056= 2^{16}(2^{17}-1)$$

$$=2^{18}(2^{19}-1)$$

Euler el 1772 va descobrir el vuitè nombre perfecte per a n=31:

$$2^{30}(2^{31}-1)$$

Actualment es coneixen 28 nombres perfectes, el darrer dels quals correspon al valor de n=132.049.

Si els nombres perfectes són aquells que són iguals a la suma dels seus divisors, aquells nombres que no ho compleixen es diuen **deficients** o **abundants** segons que la suma dels divisors sigui més petita o més gran que aquest nombre. Així, 8 és deficient ja que 8>1+2+4 i, en canvi, 12 és abundant perquè 12<1+2+3+4+6. Finalment s'anomenen **amics o enamorats** aquells nombres que la suma dels divisors de l'un és igual a l'altre i viceversa. Per exemple 220 i 284 ho són. Aquest era l'únic exemple conegut pels grecs.

Una quarta classificació pitagòrica dels nombres distingia entre nombres **lineals**, **plans** i **sòlids**. Se'n diuen lineals únicament els nombres primers. S'anomenen plans, els que són producte de dos factors i sòlids, els que ho són de tres.

Els nombres plans es dividien en **quadrats**, que eren producte de dos factors iguals, els **promècics** que eren tots els altres. A més, rebien nom **d'oblongs** aquells que eren producte d'un nombre pel seu doble i **heteromècics** els que responien a la fórmula a(a+1). Els heteromècics, 2,6,12,20,30,42,56,72,... també eren coneguts per **nombres flancs** ja que es trobaven a la mateixa distància del nombre quadrat més proper i es podia dir que el flanquejaven.

2.....4.....6
6.....9....12
12...16...20

Els nombres sòlids també es dividien en **cúbics** que eren els que resultaven del producte de tres factors iguals i els **bòmics**, producte de tres factors diferents. Finalment els nombres **plintids** que responien a la fórmula a^2b amb a>b i els **estilids** que tenien la mateixa fórmula però amb a<b.

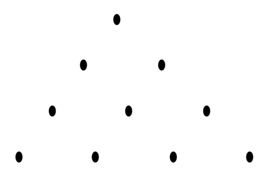
4.3. Els nombres pitagòrics

S'anomenen nombres pitagòrics o figurats aquells que les seves unitats es poden disposar en forma de figures geomètriques. Es tenen notícies que alguns deixebles de Plató van escriure algun text sobre aquests nombres com Espeusip i Filip, posteriorment Hipsicles d'Alexandria (segle II aC.) en va escriure un altre. Però, únicament es conserven obres posteriors com l'*Aritmètica* de Nicòmac de Gerasa (segle I dC.) i la de Diofant (aprox. 250 dC.) les quals recullen els sabers presents i anteriors sobre aquesta temàtica.

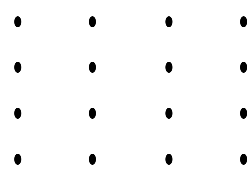
Els nombres poligonals es poden classificar en **triangulars**, **quadrangulars**, **pentagonals**, **hexagonals**, **heptagonals**.

Triangulars	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55,...
Quadrangulars	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100...
Pentagonals	1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145,...
Hexagonals	1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190,...
Heptagonals	1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, 189, 235, ...

Els nombres triangulars s'obtenen per addició successiva de la successió natural 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Així s'obté la sèrie: 1, 1+2=3, 1+2+3=6, i així successivament. Responen a la fórmula n(n+1)/2 i es poden disposar en forma de triangle.



Els nombres quadrangulars s'obtenen sumant els termes de la successió de nombres senars 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... Així, 1, 1+3=4, 1+3+5=9,... Responen a la fórmula n^2.



Els nombres pentagonals s'obtenen sumant successivament els elements de la sèrie 1, 4, 7, 10, 13, 16,... i dona 1, 1+4=5, 1+4+7=12, ... Responen a la fórmula
n (3n-1)/2.

En general els nombres poligonals d'ordre m tenen com a fórmula general:

$$N = \frac{(m-2)\cdot n^2 - (m-4)\cdot n}{2}$$

4.4. La geometria a l'escola pitagòrica

Pels pitagòrics la geometria guardava un cert caire místic. Primerament mantenia certes relacions amb els nombres. Així, consideraven que el punt s'assemblava a la unitat, la línia al dos i el pla al tres. En segon lloc, els pitagòrics adscrivien les figures a les divinitats. En aquest sentit, el triangle era considerat com el principi de generació i el quadrat servia per representat l'essència divina.

A part d'aquestes consideracions místiques, la geometria pitagòrica era una geometria material ja que no hi havia diferència entre cos físic i cos geomètric. Aquesta distinció no va arribar fins l'època de Plató que va ser el primer en separar el mon de les idees i el mon dels objectes reals, anomenat mon del sensible. Aquesta concepció material, va portar els pitagòrics a considerar que el punt era una unitat dotada de posició, una cosa semblant a un àtom a l'estil de Leucip o Demòcrit. A partir d'aquest punt es poden generar totes les altres dimensions físiques. Uns quants punts alineats donen una línia, unes línies posades successivament donen una superfície i unes quantes superfícies generen un sòlid. Aquesta generació s'exemplificava com: punt, línia, triangle equilàter, tetràedre.

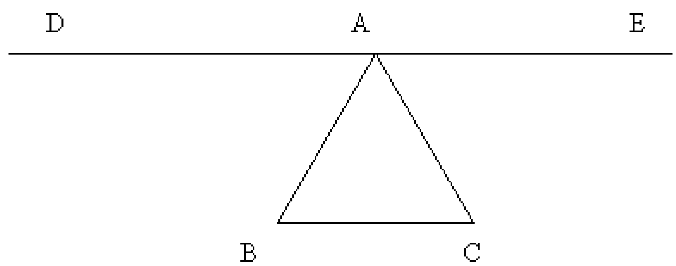
Cal precisar que els pitagòrics consideraven que la línia era una dimensió continua limitada per dos punts. Aquesta definició mostra que el concepte de línia era similar al que avui es té de segment (TOLEDO, 1971).

4.4.1. Avenços atribuïts a la geometria pitagòrica

Tot i que no hi ha cap font primària, que es conservi, relativa a la geometria de l'època de Pitàgores, la tradició i algunes obres posteriors li han atribuït quatres aportacions: 1) La proposició sobre la suma dels angles d'un triangle. 2) La descoberta de nous sòlids regulars. 3) La construcció del pentàgon regular. 4) El teorema de Pitàgores.

Procle en el *Comentari* explica que Eudem en la seva obra donava la notícia que els pitagòrics haurien demostrat la proposició que diu que els angles interiors d'un triangle sumen el mateix que dos rectes.

> "Eudemo el peripatético atribuye a los pitagóricos el hallazgo del teorema: todo triangulo tiene sus ángulos internos igual a dos rectos. Y dice que demuestra tal proposición de la siguiente manera:



> Sea ABC un triángulo, trácese por el punto A una paralela a BC, es decir, la línea DE. Por ser paralelas BC, DE, y por ser los ángulos alternos iguales, será igual el ángulo DAB con el ABC y el EAC con el ACB; súmese con ellos el ángulo BAC.
>
> Los ángulos DAB, BAC y CAE equivalen a los ángulos DAB, BAE, que valen dos rectos; o sea, estos dos ángulos rectos valen lo mismo que los tres ángulos del triangulo ABC.
>
> Por tanto: los tres ángulos de un triángulo son iguales a dos rectos". (GARCÍA BACCA, 1968: 10)

La segona atribució geomètrica és la descoberta de dos nous sòlids regulars. Ja en temps de l'Antic Egipte es coneixia l'existència de tres sòlids regulars: el cub, el tetràedre i l'octàedre. Pitàgores hauria estat el difusor d'aquestes figures a Grècia i a més hauria descobert dues més: L'icosàedre i el dodecàedre. També aquí ens hem de fiar de Procle que a propòsit d'un corol·lari ens posa sobre la pista de la possible via de descobriment:

> "El corol·lari ens ensenya que l'espai al voltant d'un punt es distribueix en angles iguals a quatre rectes i és subordinat d'aquell teorema segons el qual solament els tres polígons següents poden omplir l'espai al voltant d'un punt, que son: el triangle equilàter, el quadrat i l'hexàgon regular. Però el triangle equilàter ha de ser agafat sis voltes ja que sis voltes dos terços fa quatre rectes. I l'hexàgon ha de ser agafat tres voltes ja que l'angle de qualsevol hexàgon és un recte i un terç de recte. I el quadrat ha de ser agafat quatre voltes perquè l'angle de qualsevol quadrat és recte. En conseqüència, sis triangles equilàters reunits per l'angle formen quatre rectes i així tres hexàgons i quatre quadrats. Però tots els altres polígons, per ser complicats respecte els

> angles son deficients de quatre rectes o excedents i només aquells agafats amb els números abans esmentats fan quatre rectes. I aquest és el teorema pitagòric" (LORIA, 1987).

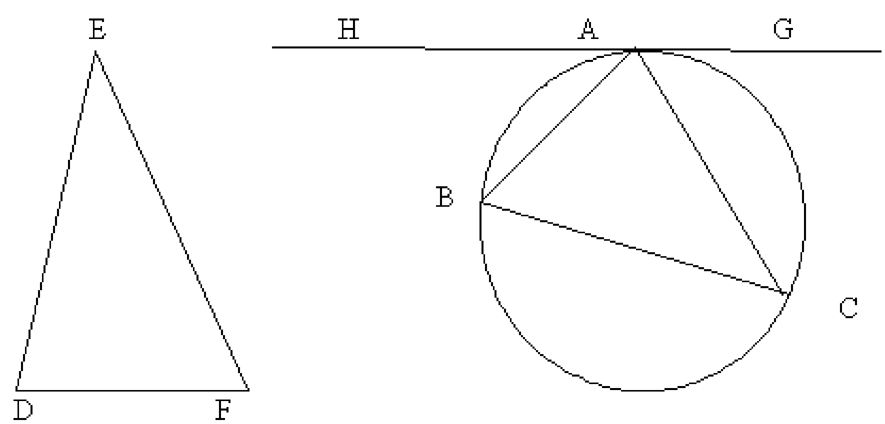
Aquest comentari suggereix que si s'uneixen al voltant d'un punt tres triangles equilàters s'obté un tetràedre i si s'uneixen quatre, un octàedre. Si posant-hi sis ja s'obté el pla, que succeirà si s'unissin cinc? La resposta porta a la descoberta de l'Icosàedre.

Continuant amb aquest mètode si s'uneixen tres quadrat s'obté el cub i si s'uneixen quatre s'aconsegueix de nou el pla. Aleshores per obtenir alguna figura més caldria unir pentàgons. Tres pentàgons units pel vèrtex permeten l'obtenció d'una nova figura: el Dodecàedre. Aquesta és la darrera possibilitat ja que unint-ne quatre ja superem el pla. Tampoc es pot seguir si agafen una altra figura plana ja que amb tres hexàgons tornem a aconseguir el pla. D'aquesta manera no sols es troben dos nous sòlids sinó que queda provada la impossibilitat de descobrir nous sòlids regulars.

L'explicació anterior és prou versemblant, encara que no hi hagi cap document més que provi que aquest fos el camí seguit per Pitàgores per obtenir aquests sòlids. Si més no, hi ha també dues proves indirectes que ajudarien a verificar aquesta atribució. La primera és que Iàmblic atribueix al pitagòric Hipàs de Metaponto (475 aC- 410 aC.) la construcció d'un dodecàedre. La segona, que al 1885 es va descobrir un dodecàedre regular d'època etrusca d'aproximadament 500 aC. i es sabut que Pitàgores va mantenir contactes amb aquesta cultura.

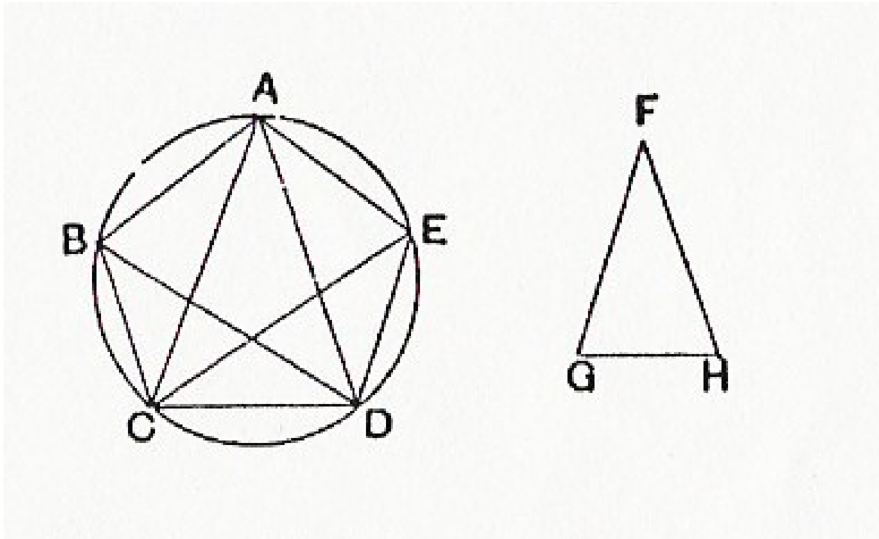
Els pitagòrics tenien una predilecció pel pentàgon ja que era la figura que els servia d'emblema. Per això, no sorprèn que, tradicionalment se'ls hagi atribuït la proposició 11 del llibre IV dels *Elements* d'Euclides on apareix una construcció amb regle i compàs d'aquesta figura.

Euclides, en la demostració de la proposició 11, utilitza la proposició 2 del mateix llibre que diu: *En un cercle donat, inseriu un triangle que sigui equiangle a un triangle donat.*



Sigui ABC el cercle i $D\hat{E}F$ el triangle donat. Dibuixem HG que talli ABC en A. Sobre la recta AG fem un angle $G\hat{A}C = D\hat{E}F$. Sobre HA i en A fem l'angle $H\hat{A}B = F\hat{D}E$. Unim B amb C i obtenim el triangle.

La proposició 11, IV diu: *En un cercle donat, inscriu un pentàgon equilàter i equiangle.*



Sigui ABCD el cercle i FGH un triangle tal que $\hat{G} = \hat{H} = 2\hat{F}$. Inscrivim aquest triangle en ABCD i obtenim $\overset{\Delta}{ACD}$ equiangle amb $\overset{\Delta}{FGH}$. Després, tallem cada angle $A\hat{C}D$ i $A\hat{D}C$ en dues parts iguals mitjançant CE i DB i obtenim B i E. Unint els punts A, B, C, D, E, A completem el pentàgon.

Demostració:

$A\hat{C}D = C\hat{D}A = 2C\hat{A}D$

CE I DB bisequen els angles $A\hat{C}D$ i $C\hat{D}A$.

Així, $D\hat{A}C = A\hat{C}E = E\hat{C}D = C\hat{D}B = B\hat{D}A$ i com que a angles iguals correspon arcs iguals: $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BA}$, el pentàgon és equilàter.

També és equiangle ja que:

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DE}$

Si als dos arcs els afegim l'arc BCD resulta:

$\overset{\frown}{AB} + B\overset{\frown}{C}D = A\overset{\frown}{B}CD$

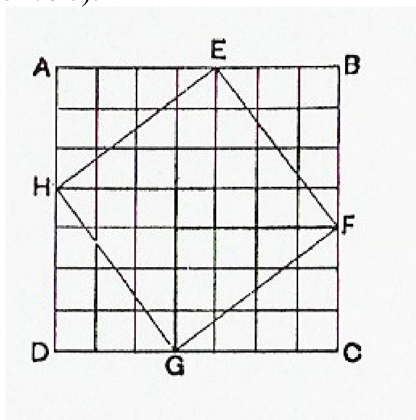
$\overset{\frown}{DE} + B\overset{\frown}{C}D = E\overset{\frown}{D}CB$

i aleshores $A\overset{\frown}{B}CD = E\overset{\frown}{D}CB$ però $A\overset{\frown}{B}CD$ és l'arc de l'angle $A\hat{E}D$ i $E\overset{\frown}{D}CB$ és l'arc de l'angle $B\hat{A}E$. Com que a arcs iguals correspon angles iguals $A\hat{E}D = B\hat{A}E$ i el pentàgon és equiangle.

4.4.2. El Teorema de Pitàgores

La darrera de les aportacions dels pitagòrics a la geometria és el conegut teorema de Pitàgores. Ja hem pogut veure com en civilitzacions anteriors les triades pitagòriques eren conegudes. Tant a l'Antic Egipte com a la Mesopotàmia aquestes ternes de nombres eren calculades i emprades en

diverses operacions de caire agrícola com les esteses de cordes. També a l'Antiga Xina eren conegudes i se sap que cap el 1100 aC. l'astròleg Chon va donar una intuïtiva demostració d’aquest teorema (ENRIQUES, 1954: 96):



Àrea del quadrat de costat la hipotenusa = Àrea del quadrat gran - Àrea 4 triangles rectangles.

$$A = 7^2 - 4 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = 25$$

Durant el segle V aC. l’imam Apastamba va enunciar un teorema general que relacionava els quadrats dels costats del rectangle i la diagonal, particularitzat per la triada 15, 36, 39.

$$15^2 + 36^2 = 39^2$$

Ara bé la demostració del teorema que ha estat atribuïda a Pitàgores és la que recull Euclides en les proposicions 47 i 48 del llibre I. De tots els biògrafs de Pitàgores únicament Plutarc i Diògenes Laerci són del parer que Pitàgores en fou l’autor i Procle afirma que la tradició ho ha atribuït a l’Escola Pitagòrica.

L’enunciat de la proposició 47 és el següent:

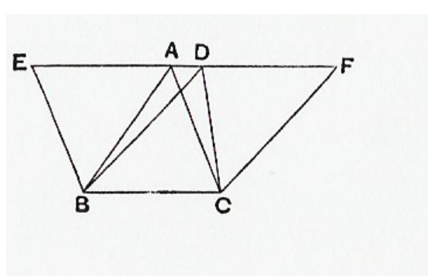
> “En els triangles rectangles, el quadrat del costat que subtendeix l’angle recte és igual a la suma dels costats dels quadrats construïts sobre els costats que comprenen l’angle recte”.

I el de la proposició 48 resulta ser el teorema recíproc:

> “Si el quadrat d’un dels costats d’un triangle es igual als quadrats dels dos costats restants d’aquest triangle, l’angle comprès pels dos costats restants és recte”.

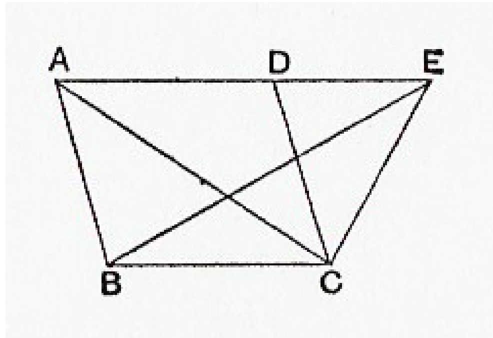
La demostració de la proposició 47 es basa en dues proposicions prèvies:

Proposició 37: *Els triangles posats sobre bases iguals i entre les mateixes paral·leles són iguals.*



Proposició 41: *Si un paral·lelogram té la mateixa base d’un triangle i està entre les mateixes*

paral·leles és doble del triangle.



En la proposició 41 cal provar que:

$$el\ quadrat\ ABCD = 2\ el\ triangle\ EBC$$

Aleshores si es construeixen els triangles ABC i EBC resulta que per la proposició 37:

$$triangle\ ABC = triangle\ EBC$$

Però, el quadrat ABCD és el doble del triangle ABC per ser AC la seva diagonal i aquesta el divideix en dos parts iguals.

Per tant:

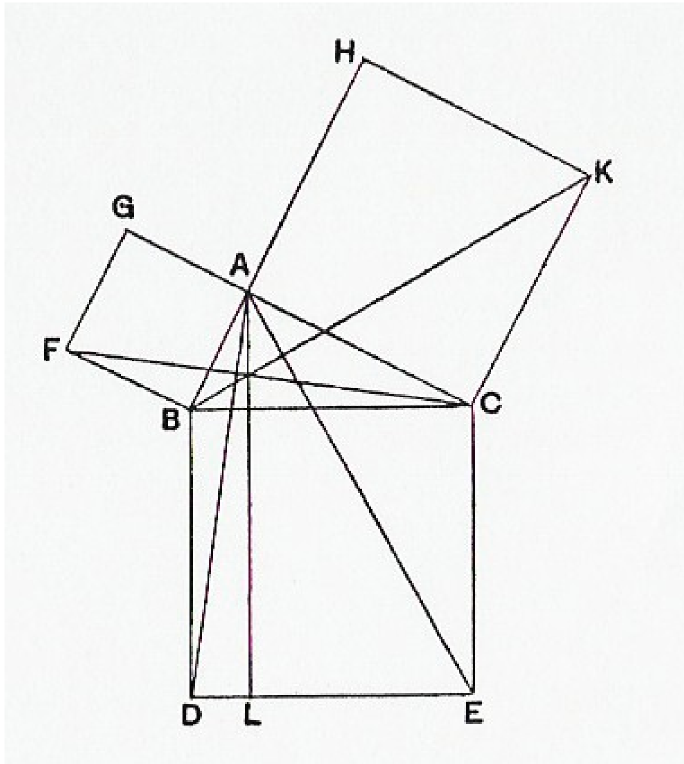
$$el\ quadrat\ ABCD = 2\ el\ triangle\ EBC$$

La proposició 47 és la que enuncia el teorema directe de Pitàgores: *En els triangles rectangles, el quadrat del costat oposat a l'angle dret és igual als quadrats dels costats que comprenen l'angle recte.*

La demostració és essencialment retòrica i tot seguit intentaren traduir-la en la mesura del possible a un llenguatge més entenedor per un lector dels nostres dies.

Sigui ABC el triangle rectangle, l'angle recte del qual estigui en A. Construirem quadrats sobre BC, BA i AC. Un cop fet això dibuixarem un a recta AL paral·lela a BD i unirem A amb D i F amb C .

L'objectiu de la demostració serà provar que l'àrea del quadrat GB és igual a la del rectangle BL i anàlogament que la del quadrat HC és igual a la del rectangle CL.



Resulta evident que els angles DBC i FBC són igual tots dos a 90º. Llavors si els sumem l'angle ABC resulta

$$A\hat{B}C + D\hat{B}C = A\hat{B}D$$
$$A\hat{B}C + F\hat{B}A = F\hat{B}C$$
$$Llavors$$
$$A\hat{B}D = F\hat{B}C$$

A més, com que els segments DB=BC i FB=BA resulta que els triangles DBA i FBC tenen un angle igual i dos costats iguals, cosa que implica que l'altre costat AD=FC. En conseqüència:

$$El\ quadrat\ BL = 2\ el\ triangle\ ABD$$
$$El\ quadrat\ GB = 2\ el\ triangle\ FBC$$

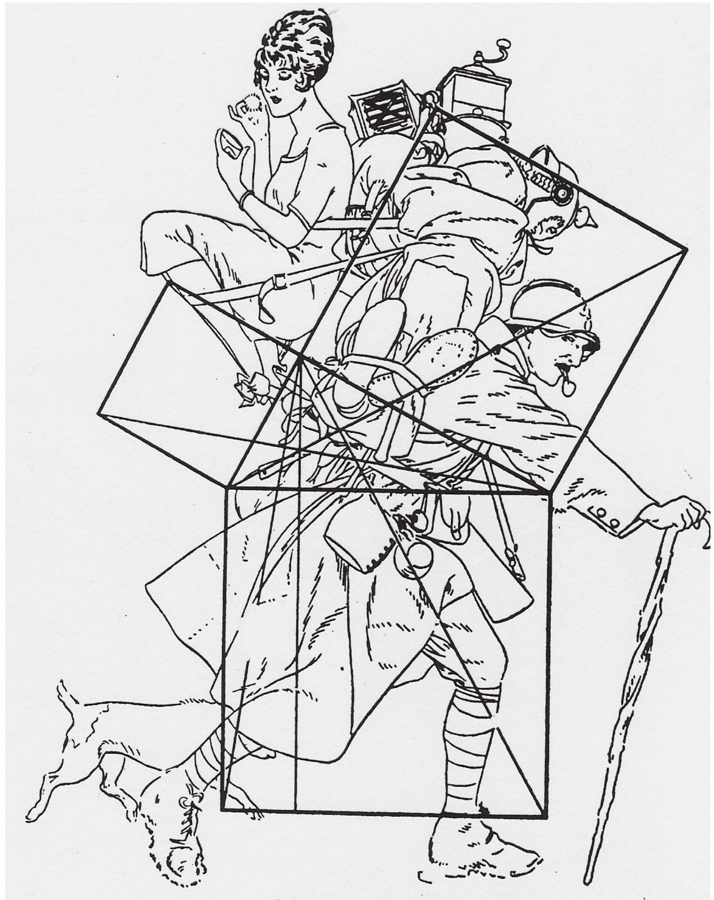
i per la proposició 41 resulta que els triangles ABD i FBC són iguals cosa que prova que els quadrilàters BL i GB també ho són.

Anàlogament es provaria per l'altre parell de quadrilàters i quedaria així provat el teorema directe de Pitàgores.

Tanmateix Euclides inclou in teorema recíproc:

Proposició 48: *Si el quadrat d'un dels costats d'un triangle és igual als quadrats dels dos costats restants d'aquest triangle, l'angle comprés pels dos costats restants és recte.*

Una prova de la importància de la demostració euclidiana del teorema de pitàgores la proporciona la imatge següent:



Aquesta imatge va aparèixer a la revista *Vie Parisienne* durant la primera guerra mundial i és coneguda com la cadira de la núvia.

5. ELS INCOMMENSURABLES

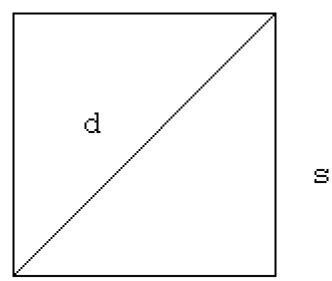
Els pitagòrics consideraven que l'essència de totes les coses podia ser explicada amb les propietats dels nombres naturals i de les seves raons. Però un descobriment va capgirar aquesta creença i va trasbalsar la comunitat científica grega. Els nombres naturals no servien per comparar la diagonal d'un quadrat, d'un cub o d'un pentàgon regular amb la seva aresta. Ambdós segment esdevenien, així, incommensurables.

No se sap ni com ni quan es va fer aquesta descoberta. Potser va ser d'origen hindú o fins i tot va tenir lloc amb posterioritat a Pitàgores. Però, el més probable fos que succeís a mitjans del segle V aC. i que els protagonistes fossin els deixebles de l'Escola pitagòrica.

Cal tenir present que aquest problema es planteja quan s'aplica el Teorema de Pitàgores a un triangle rectangle isòsceles o quan es busca, mitjançant una mitjana proporcional, el costat d'un quadrat d'igual àrea que un rectangle de costats b i 2b.

5.1. La diagonal d'un quadrat

Aristòtil esmenta una demostració de la incommensurabilitat de la diagonal d'un quadrat respecte el seu costat i va procedir per reducció a l'absurd.



Suposa que d i s són commensurables. Aleshores, $\frac{d}{s}$ serà racional i igual a $\frac{p}{q}$. Suposarem que aquesta fracció $\frac{p}{q}$ és irreductible.

Aleshores, en virtut del Teorema de Pitàgores $d^2=s^2+s^2=2s^s$. En conseqüència:

$$\left(\frac{d}{s}\right)^2 = 2$$

Per

$$\left(\frac{d}{s}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2q^2$$

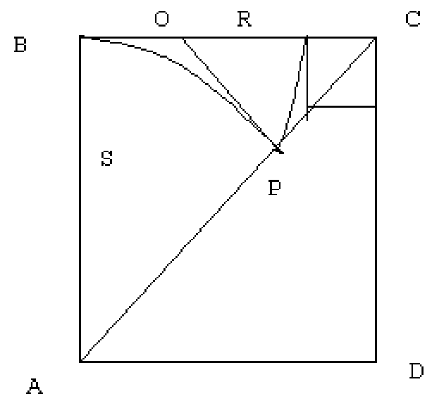
Tenint en compte que el quadrat d'un nombre parell és parell i que el quadrat d'un nombre senar és sempre senar, podem afirmar que p és parell i com que la fracció és irreductible q ha de ser senar.

Sigui $p=2r$. Si substituïm $(2r)^2=2q^2 \Rightarrow 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2\,r^2$

aleshores resulta que *q* també és parell. Cap nombre enter pot ser parell i senar a la vegada, cosa que condueix a un absurd i que prova que la hipòtesi que *d* i *s* eren commensurables resulta falsa.

Tot i que aquesta demostració és molt correcta i rigorosa és dubtós que fos la base del descobriment dels incommensurables ja que la demostració requereix massa abstracció i sembla més aviat pensada a posteriori, un cop feta la descoberta.

El procés de dur el costat d'un quadrat sobre la seva diagonal pot repetir-se indefinidament sense arribar a exhaurir aquesta distància.



Així si portem AP = AB sobre la diagonal AC i després aixequen la perpendicular PQ a aquesta obtenim Q i un altre quadrat la diagonal del qual és QC i el costat PC. Aleshores es compleix:

$$\frac{CQ}{PC} = \frac{AC}{AB}$$

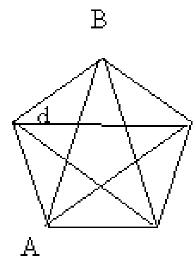
Aquest procés es pot repetir un altre cop portant QP sobre CQ i obtenint el punt R. Després per R tracem la perpendicular RS i obtenim un nou quadrat de diagonal SC i de costat RC. Aquí també es complirà que:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CQ}{PC} = \frac{CS}{RC}$$

Es pot veure que aquest és un procés que es por repetir indefinidament sense que la diagonal s'exhaureixi (BOYER, 1986:107).

5.2. La secció àurea

El símbol de la secta pitagòrica era un pentàgon al que se li havien traçat les cinc diagonals i aleshores apareixia dibuixada una estrella i que es coneixia amb el nom de pentàgon estelat.

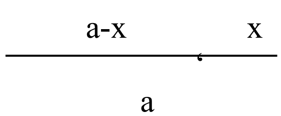


Les diagonals traçades sobre el pentàgon es tallen entre si determinant uns segments. Així, la diagonal AB es tallada per dos diagonals més que determinen sobre ella els punts P i Q. Aleshores es compleix que cada un d'aquests punts divideix la diagonal en segments que guarden la proporció

$$\frac{AB}{PB} = \frac{PB}{AP}$$

Tot el segment és a la part més gran com la part més gran és a la part més petita. Els grecs deien que es dividia un segment en extrema i mitjana raó i al segle XVII, Kepler li va posar el nom de secció àurea o nombre d'or. La tradició ha atribuït aquesta descoberta a Hipàs de Metaponto

En llenguatge actual aquesta proporció seria:



$$\frac{a}{a-x} = \frac{a-x}{x}$$

$$ax = (a-x)^2$$

$$ax = a^2 - 2ax + x^2$$

$$0 = x^2 - 3ax + a^2$$

$$x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 4a^2}}{2} = \frac{3a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}a$$

Aquest és el valor del segment més petit. Si ara calculem quan val la proporció:

$$\frac{a}{a-x} = \frac{a-x}{x}$$

$$\frac{a}{a-x} = \frac{a}{a - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}a} = \frac{1}{1 - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1 \pm \sqrt{5}}$$

Si racionalitzem aquesta expressió

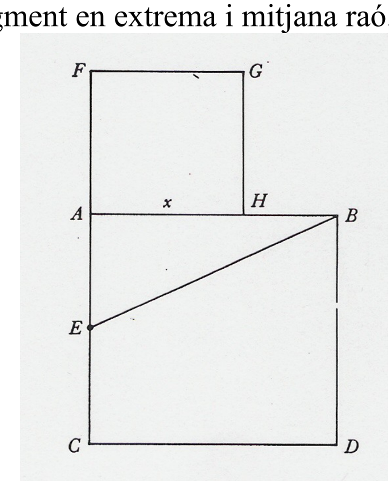
$$\frac{2}{-1+\sqrt{5}}=\frac{2\left(-1-\sqrt{5}\right)}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\frac{2}{-1-\sqrt{5}}=\frac{2\left(-1+\sqrt{5}\right)}{-4}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Obtenim que la proporció dona un valor relacionat amb $\sqrt{5}$ cosa que significaria que el problema dels incommensurables no l'hauria desencadenat la diagonal del quadrat i per tant $\sqrt{2}$. Així, el nombre d'or és:

$$\frac{a}{a-x}=\frac{a-x}{x}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Finalment cal precisar que el procés de dividir un segment en proporció àurea és autoreproductiu és a dir que es pot repetir indefinidament simplement portant sobre el segment gran el segment petit. Així, sigui RS el segment i P_1 el punt que el divideix en extrema i mitjana raó. Si portem el segment petit P_1S sobre RP_1 de manera que es determina un punt P_2 tal que $RP_2=P_1S$ aleshores RP_1 queda dividit en extrema i mitjana raó pel punt P_2. Resulta evident que aquest procés es pot dur a terme indefinidament.

Euclides en el llibre II proposició 11 i en el llibre IV proposició 30 explica com es por dividir, amb regle i compàs, un segment en extrema i mitjana raó.



Sigui AB el segment que volem dividir en extrema i mitjana raó. Primer, hem de construir un quadrat ABCD de costat AB. Després, dividirem el segment AC en dues parts pel seu punt mig E. A continuació unirem E i B i amb centre E i radi EB traçarem un arc fins que talli la prolongació de CA en el punt F de manera que EF=EB. Tot seguit completarem el quadrat AFGH de costat AF. Aleshores es determina un punt H sobre AB que compleix:

$$\frac{AB}{AH}=\frac{AH}{HB}$$

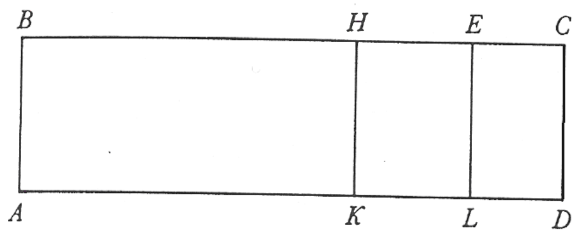
Aquesta proporció indica que el punt H ha dividit el segment AB en extrem i mitjana raó.

6. LA DETERMINACIÓ DE LES ÀREES

El llibre II d'Euclides recull una sèrie de proposicions que segons Procle corresponen a l'època pitagòrica. Tot sembla indicar que be abans o be després de la descoberta dels incommensurables, els pitagòrics van desenvolupar un seguit de proposicions geomètriques que són equivalents a identitats algebraiques o que plantegen equacions. Per això, al 1886 Hieronymous Georg Zeuthen (1839-1920) va designar-les con *àlgebra geomètrica.*

Tot seguit veurem algunes d'aquestes proposicions i la interpretació que se'n pot fer.

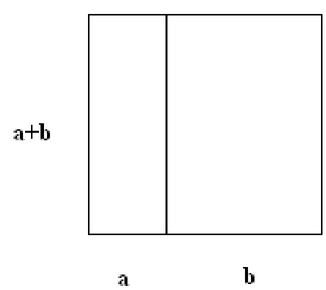
Proposició 1:*Donades dues rectes, una de les quals dividida en un nombre qualsevol de parts, el rectangle contingut per les dues rectes és igual a la suma dels rectangles continguts per la recta no dividida i l'única part de l'altra.*



En llenguatge actual aquesta proposició no és altra cosa que una propietat distributiva:

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad$$

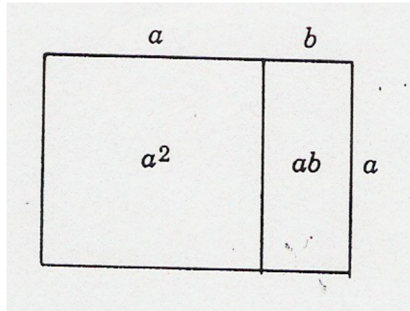
Proposició 2: *Si es divideix arbitràriament una recta, la suma dels rectangles continguts en tota la recta i en cada una de les parts és igual al quadrat de tota la recta.*



En la nomenclatura actual seria:

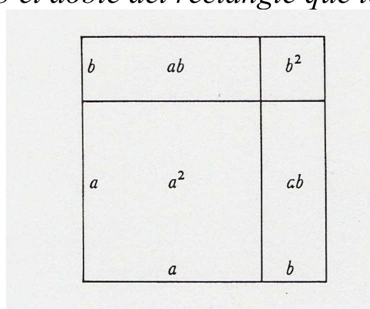
$$a(a+b)+b(a+b)=(a+b)^2$$

Proposició 3: *Si es divideix una recta a l'atzar, el rectangle contingut per tota la recta i per una de les parts en què es troba dividida és igual a la suma dels rectangles continguts en les dues parts amb el quadrat de la part ja considerada.*



és a dir que $(a+b)\ a = ab + a^2$

Proposició 4*: Si una recta es divideix a l'atzar el seu quadrat és igual a la suma dels quadrats de les parts juntament amb el doble del rectangle que les parts contenen.*

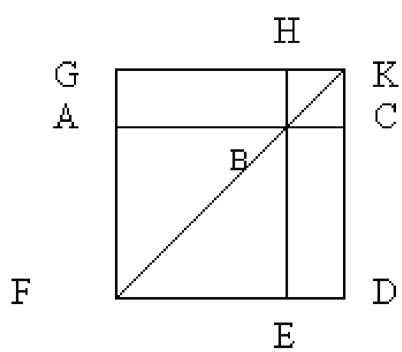


Aleshores es tracta del conegut producte notable $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

El llibre II dels *Elements* d'Euclides conté, també, unes altres proposicions que plantegen la construcció d'un rectangle de superfície donada en determinades condicions. La primera i més senzilla consisteix en conèixer un costat. És tracta, doncs, de resoldre una equació de la forma $ax=bc$ on bc és l'àrea coneguda i a el costat conegut del rectangle a construir. Només cal trobar el valor de x. Des d'un punt de vista geomètric únicament caldria construir una quarta proporcional:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Es creu que els pitagòrics, per resoldre aquesta proposició, empraven el gnòmon.



Així sigui AB el costat donat i BCDE l'àrea coneguda. Aleshores es representa AB sobre la prolongació de BC i es completa el rectangle ABEF. A continuació es traça la seva diagonal. Després es perllonga el costat CD del rectangle fins que talli la prolongació de la diagonal obtenint-se el punt K. Llavors es completa el rectangle DKGF i perllongant BE s'obté el punt H. El rectangle buscat és ABGH i el costat desconegut és HB. La justificació és bastant evident si es té en compte que la diagonal divideix el rectangle en dues parts iguals i que en conseqüència ABGH és igual a BCDE. Cal observar que es forma el gnòmon GHKCDEBA.

Aquest és el problema més senzill de determinació de les àrees. Ara bé, la condició a complir per l'àrea a traçar pot complicar-se i dona lloc a l'aplicació per defecte o el·líptica i l'aplicació per excés o hiperbòlica (LORIA, 1987: 43) .

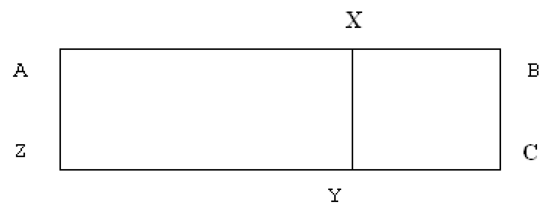
L'aplicació el·líptica consisteix a construir, sobre una part d'un segment conegut *a*, un rectangle de manera que la seva àrea superi a l'àrea donada en un quadrat. Així, si la superfície coneguda li diem b^2 i a és el costat conegut aquest problema consisteix a resoldre l'equació de segon grau:

$$a\,x - b^2 = x^2$$

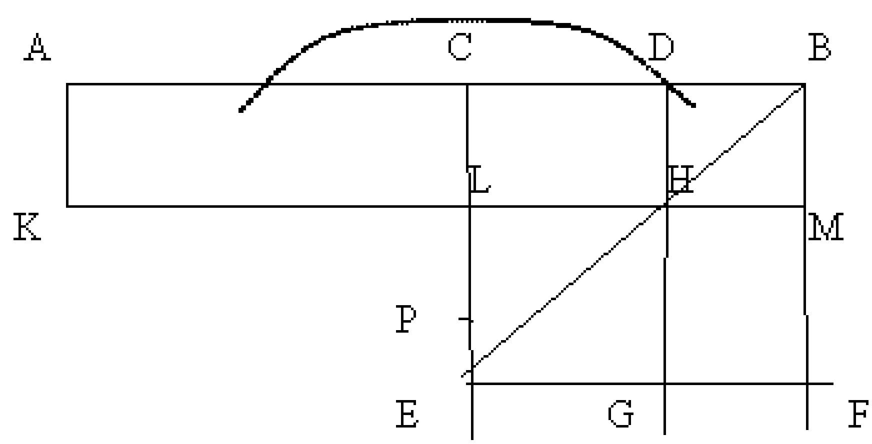
L'enunciat que apareix en llibre II és el següent:

Construir sobre una porció de la recta AB un rectangle AXYZ de superfície donada i tal que la diferència entre ell i el rectangle d'igual altura i de base AB sigui un quadrat.

Observis que si AXYZ= b^2, i AB = a s'obté l'equació anterior.

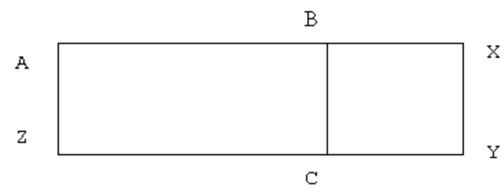


La construcció que proposa Euclides també empra el gnòmon.

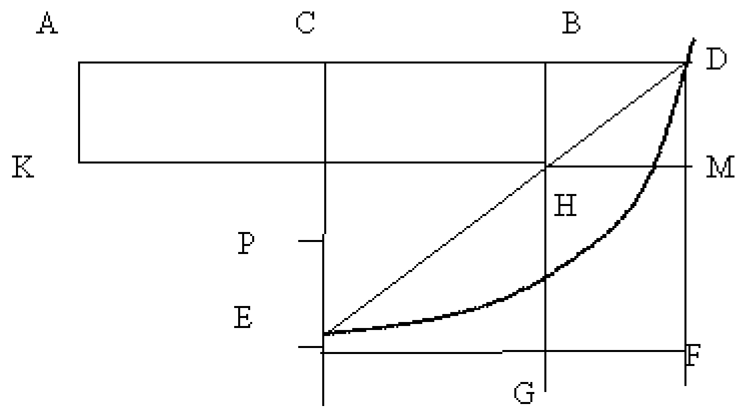


Consisteix a dividir el segment AB=a pel seu punt mig C. Sobre la perpendicular que passa por C es porta un segment de valor b i s'obté el punt P. Amb centre P i radi $a/2$ es traça un arc que determina sobre AB un punt D. Aleshores és completen els rectangles ABMK on BM=BD. Després es traça la perpendicular per D i s'obté H. A continuació es traça la diagonal BH i s'obté sobre CL el punt E i traçant la paral·lela per E es completa el rectangle BDGF. D'aquesta manera queda el gnòmon completat. El segment buscat és x= BD.

L'aplicació hiperbòlica és enunciada de la manera següent: *Construir sobre la prolongació d'una recta AB un rectangle AXYZ d'àrea donada i tal que la diferència entre ella i el rectangle* *d'igual altura que tingui per base AB sigui un quadrat.*



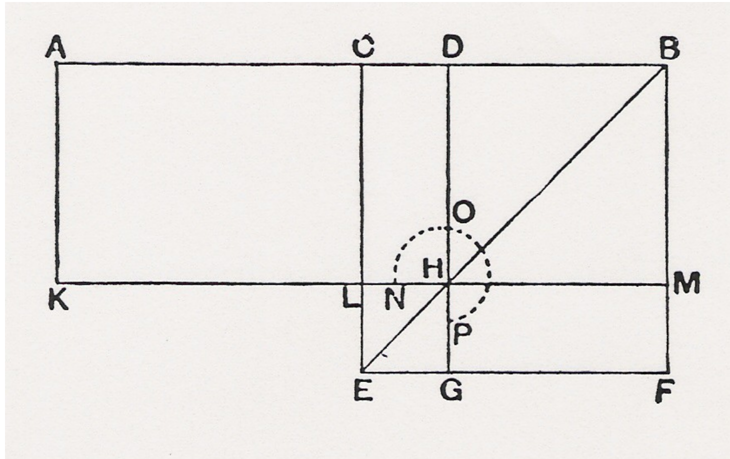
Aleshores si AXYZ=b^2 i AB= a, la resolució del problema consisteix a trobar un valor x de manera que el rectangle *ax* sigui inferior a l'àrea donada b^2 en un quadrat x^2. És a dir que la resolució pot ser plantejada com l'equació de segon grau següent: b^2-*ax*=x^2.



La construcció que Euclides apunta és molt semblant a l'anterior i es basa en la construcció d'un gnòmon. Sigui AB=*a* i CP=*b*. Primerament dibuixem AB i pel punt mig C tracem la perpendicular i marquem el punt P. Després portem sobre la prolongació de CP un segment CE=PB. Aleshores amb centre C i radi CE tracem l'arc que ens determina sobre la prolongació de CB el punt D de manera que CE=CD. Llavors es completa el gnòmon unint E amb D, de manera que s'obté, primer el punt H sobre BG i es completen els rectangles AKMD i BDGF.

Les construccions anteriors les fa servir Euclides per a les demostracions de les proposicions 5 i 6 del llibre II

Proposició 5, II. *Si una recta és dividida en parts iguals i en parts desiguals, el rectangle contingut en les parts desiguals, juntament amb el quadrat de la diferència entre les dues seccions és igual al quadrat de la meitat de la recta donada.*



Si AB és el segment donat, C és el seu punt mig i D és un altre punt del mateix segment, aleshores es compleix que:

$$AD \cdot BD + CD^2 = CB^2$$

La demostració consisteix primer en la construcció geomètrica. Es forma el quadrat CEFB de costat CB i s'uneix B amb E per dibuixar la diagonal d'aquesta figura. Després es traça la paral·lela DG a CE i BF la qual determina sobre KM el punt H. Per H es traça la paral·lela KM a AB i es completa el rectangle.

Un cop feta la construcció es procedeix a la demostració:

$$\textit{quadrat } CH = \textit{quadrat } HF$$
$$\textit{quadrat } CH + \textit{quadrat } DM = \textit{quadrat } CM$$
$$\textit{quadrat } HF + \textit{quadratDM} = \textit{quadrat } DF$$

Aleshores

$$\textit{quadrat } DF = \textit{quadrat } CM$$

pero

$$\textit{quadrat } CM = \textit{quadrat } AL \textit{ ja que } C \textit{ es punt mig} \Rightarrow \textit{quadrat } AL = \textit{quadrat } DF$$

Aleshores

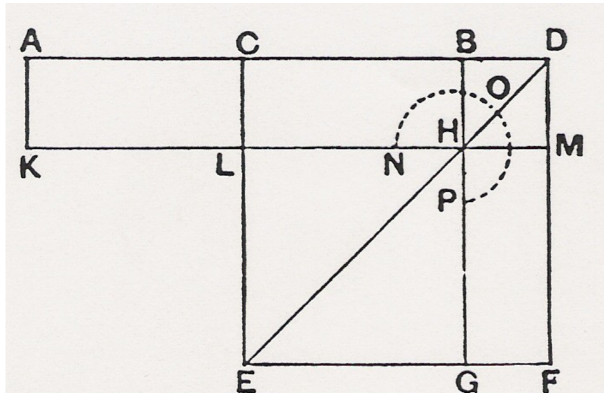
$$\textit{quadrat } AL + \textit{quadrat } CH = \textit{quadrat } AH$$
$$\textit{tot el gnomon } NOP = \textit{quadrat } CH + \textit{quadrat } DF$$

a mes

$$\textit{quadrat } AH = AD \cdot DB = \textit{gnomon } NOP$$
$$\textit{Si afegim } CD^2 \textit{ o } LG^2 \textit{ s'obte}$$
$$AD \cdot BD + CD^2 = NOP + LG^2 = CEFB = CB^2$$

Una altra proposició que també s'utilitza en el cas de la determinació hiperbòlica és:

Proposició 6,II: *Si es biseca una recta i a ella se li afegeix una altra recta, el rectangle* *contingut per la recta així composta i per l'adjunta, juntament amb el quadrat de la meitat de la recta donada és igual al quadrat construït sobre la suma de la recta adjunta i de la meitat de la recta donada*.



La demostració i construcció són similars a l'anterior amb la diferència que en aquesta proposició cal provar que $AD \cdot BD + CB^2 = (CB+BD)^2 = CD^2$

Darrere d'alguns d'aquests exercicis hi son les regles algebraiques i en algunes de les proposicions es pot veure la resolució geomètrica d'equacions de segon grau. Un altre procediment per trobar la solució d'una equació de segon grau el trobem en el mètode de dividir un segment en extrema i mitjana raó on es troba un valor x que doni solució a

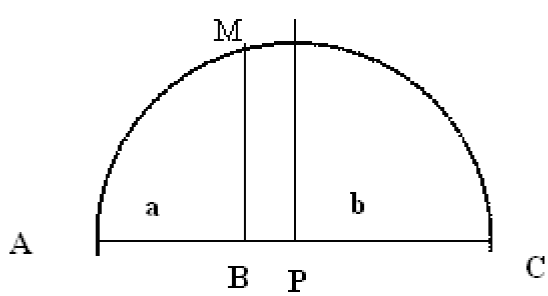
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{(a-x)}$$

o, el que és el mateix, a l'equació $a(a-x)=x^2$

Un altre exemple el trobem en l'obtenció de la mitjana proporcional de dos magnituds *a* i *b*

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$$

que no és altra cosa que l'equació $x^2=ab$. La construcció és molt simple només cal dibuixar *a* i *b* l'un a continuació de l'altre, trobar-hi el punt mitjà P i amb centre P i radi PC=PA traçar la semicircumferència. Després, per B s'aixeca la perpendicular i s'obté el punt M. El valor buscat és x=BM (COLERUS, 1972: 86).



7. LA TEORIA DE LES PROPORCIONS

Nicòmac afirmava que Pitàgores coneixia les proporcions aritmètica, geomètrica i harmònica. Iàmblic, bastants anys més tard, també sostingué que a l'Escola pitagòrica s'estudiaven aquestes proporcions i que havia estat el propi Pitàgores qui havia portat de Babilònia la proporció següent:

$$a : \frac{a+b}{2} :: \frac{2ab}{a+b} : b$$

L'origen de les proporcions neix de la necessitat de comparar dues magnituds. Ara be, aquesta comparació es pot fer per diferència o per quocient. Aleshores si es tenen tres magnituds a,b,c:

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a} \qquad \textit{proporcio aritmetica}$$

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} \qquad \textit{proporcio geometrica}$$

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c} \qquad \textit{proporcio harmonica}$$

Les proporcions son el nexe d'unió entre l'aritmètica i la geometria. Formen par de la ciència dels nombres però si en lloc de nombre es comparen segments, aleshores hi som a la geometria

7.1 Les proporcions a Èudox

La descoberta dels incommensurables havia produït un escàndol lògic i havia desterrat la teoria de les proporcions ja que, es creia que, només permetia la comparació de magnituds commensurables. Però fou Èudox, un deixeble de l'Escola Platònica qui, en oferir una nova definició de raó, va ampliar el camp de les proporcions a les magnituds incommensurables i va propiciar l'enorme desenvolupament de la geometria.

La nova definició be recollida en el llibre V dels *Elements* d'Euclides

> Dues magnituds es diu que tenen una raó una respecte a l'altra si es pot trobar un múltiple d'una qualsevol d'elles que superi a l'altra.

Aquesta definició pot ser aplicada a magnituds geomètriques i significa la introducció de la idea de magnitud continua que resulta especialment aplicable a segments, angles, àrees, volums, temps i altres de semblants.

Després Èudox va definir la proporció com una igualtat de raons:

> Es diu que magnituds estan en la mateixa raó, la primera a la segona i la tercera a la quarta, quan, agafats qualsevol equimúltiples de la primera i la tercera i qualsevol equimúltiples de la segona i la quarta, els primers equimúltiples tots dos excedeixen, són iguals o son menors que els segons equimúltiples agafats en l'ordre corresponent.

Aquesta definició estableix que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

si es multiplica a i c per qualsevol nombre enter m i b i d per qualsevol nombre enter n, aleshores resulta que si:

$$ma < nb \quad \Rightarrow \quad mc < nd$$
$$o$$
$$ma = nb \quad \Rightarrow \quad mc = nd$$
$$o$$
$$ma > nb \quad \Rightarrow \quad mc > nd$$

Per comprendre l'abast d'aquesta definició cal utilitzar nombres actuals i veure que:

$$\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

si es compleix alguna de les tres afirmacions

$$m\sqrt{2} < n\,1 \quad \Rightarrow \quad m\sqrt{6} < n\sqrt{3}$$
$$o$$
$$m\sqrt{2} = n\,1 \quad \Rightarrow \quad m\sqrt{6} = n\sqrt{3}$$
$$o$$
$$m\sqrt{2} > n\,1 \quad \Rightarrow \quad m\sqrt{6} > n\sqrt{3}$$

Però, l'afirmació $m\sqrt{2} = n\,1$ no és possible per ser m i n enters i per això $m\sqrt{6} = n\sqrt{3}$ no es pot donar. Tanmateix, la definició no exclou aquest cas ja que només exigeix que es compleixin alguna de les tres afirmacions. Així, la definició d'Èudox aconsegueix evitar els nombres irracionals.

Aquesta definició no està gaire allunyada de la que es va formular al segle XIX per definir els nombres racionals i els irracionals, ja que també separava els nombres m/n en 2 subclasses

$$\frac{m}{n} \quad racional \quad si \quad ma \leq nb$$
$$i\,si \quad ma > nb$$

Això mateix és el que es coneix com un tall de Dedekind.

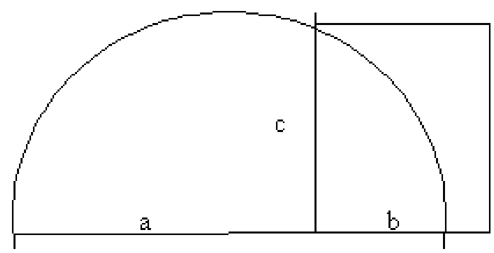
Dedekind, al 1858 va estudiar els nombre irracionals i va concloure que calia desenvolupar el concepte de límit de manera aritmètica i no geomètrica com es feia fins aleshores. Es va preguntar quina cosa distingia les magnituds geomètriques continues dels nombres racionals. Galileu i Leibnitz havien pensat que la continuïtat dels punts de la recta era fruit o resultat de la seva densitat, entenent per aquest concepte el fet que entre dos punts sempre hi hagués un altre punt. Però Dedekind va constatar que els racionals també gaudeixen d'aquesta propietat però en canvi no formen un continu. Aleshores va pensar que la continuïtat d'un segment era deguda al fet que si el dividim en dues parts per un punt s'obtenen dues classes de manera que els punts de la recta pertanyen a una o a l'altra classe. Així, Dedekind va establir una correspondència entre els nombres reals i els punts de la recta. Llavors, qualsevol partició dels nombres racionals en dos parts disjuntes A i B de manera que els elements de A fossin menors que els de B implicava que només existís un únic nombre real que produïa el tall. Llavors es complia que, si els conjunts A i B tenien mínim, el tall era racional i, en canvi, sí aquest mínim no existia, aleshores el nombre era irracional (GARCÍA OVEJERO, 1971:294).

7.2. El mètode d'exhaustió

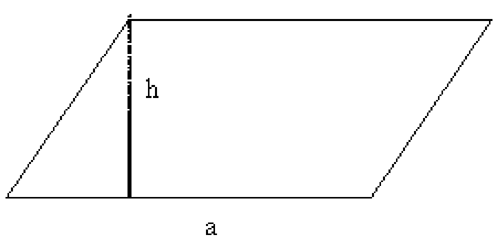
Després de la crisi dels incommensurables els grecs optaren per representar totes les magnituds mitjançant els elements de la geometria (punts, segments, figures etc.) ja que aquesta els semblava més general. Per estudiar les seves relacions i propietats van recórrer a les proporcions, eina que després de la definició d'Èudox adquiria validesa també per la geometria.

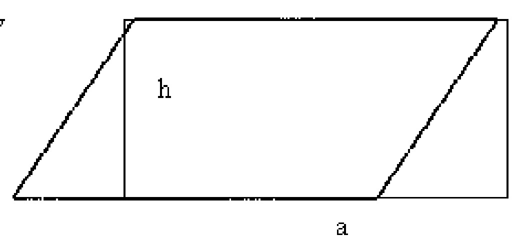
Èudox també va proposar un mètode per eludir les situacions on hi havia processos infinits fent recurs a les proporcions. Un dels casos estava relacionat amb les tècniques de la quadratura.

Quadrar un rectangle, és a dir trobar el costat d'un quadrat d'àrea equivalent, tenia una solució geomètrica senzilla. Només calia trobar el segment mitjana proporcional. Així, si el rectangle que es volia quadrar estava format pels segments *a* i *b*, el costat del quadrat d'igual àrea es podia obtenir $c^2=ab$. Geomètricament només calia posar els segments *a* i *b* un a continuació de l'altre i dibuixar el semicercle que tingués per diàmetre *a+b*. El segment c s'obtenia aixecant la perpendicular en el punt d'unió d'*a* i *b*.

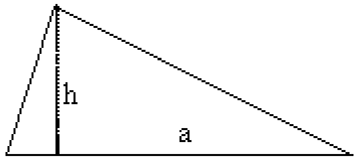


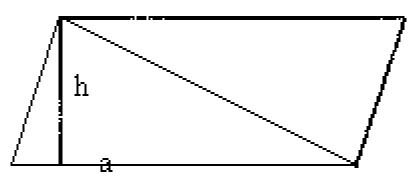
Si en lloc d'un rectangle es volia quadrar qualsevol paral·lelogram només calia convertir-lo primer en un rectangle.





I si el que es volia quadrat era un triangle haurem de construir primer el quadrilàter d'àrea doble.





Qualsevol altre polígon podia ser quadrat dividint-lo en triangles, convertint aquests triangles en rectangles i després sumant els quadrats equivalents. No obstant, el problema es plantejava quan el que es volia quadrar eren figures curvilínies, com per exemple el cercle.

Antifó, en el segle V a C., havia ideat un procediment que consistia en descompondre la figura curvilínia en un cert nombre de figures rectilínies de manera que en augmentar el nombre de costats al final s'arribaria a completar la figura curvilínia. Ara be, aquest plantejament, pel que fa a l'àrea del cercle suposava que aquesta podia ser obtinguda augmentant el nombre de costats d'un polígon inscrit un nombre molt gran però finit de vegades. No obstant, els grecs, a l'època d'Èudox ja eren conscients que per molts costats que tingués el polígon inscrit en un cercle mai s'aconseguiria exhaurir l'àrea del cercle. Aquesta era una situació que comportava un procés infinit.

El mètode d'exhaustió ideat per Èudox consistia en una doble reducció a l'absurd. Suposava coneguda la relació de la qual es volia provar la seva certesa. Per exemple que la relació entre les àrees de les figures A i B és una determinada

$$A = k B$$

Aleshores construïa dos seqüències de figures rectilínies en les quals la relació fos d'una certa provada prèviament

$$A_1 \langle A_2 \langle \ldots \langle A_n$$
$$B_1 \langle B_2 \langle \ldots \langle B_n$$

i totes elles complissin que $A_n \langle B_n$

Finalment demostrava, utilitzant les successions anteriors, que s'arribava a un absurd tant si es suposava $A>k\,B$ com si $A< k\,B$. Aleshores es concloïa que $A= k\,B$.

El mètode d'exhaustió tenia un inconvenient inicial consistent en què calia conèixer prèviament la relació, proporció o fórmula la certesa de la qual es volia provar, ja que el mètode només servia per mostrar la certesa i no per a obtenir-la. Era un mètode a posteriori i no a priori i per això estava mancat de valor heurístic.

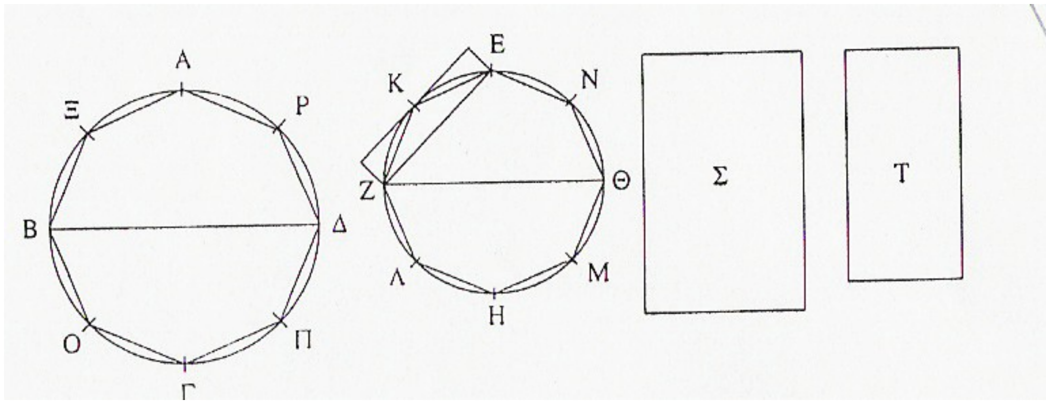
Com hem pogut comprovar la seva idea principal es trobava en l'exhauriment de la figura mitjançant una successió de polígons regular. Per a dur a terme aquest procés, hom creu que Èudox emprava una proposició, la I del llibre X, que està recollida en els *Elements* d'Euclides.

> Donades dos magnituds desiguals, si de la major restem una magnitud major que la seva meitat i del que queda restem una magnitud major que la seva meitat, i així repetim el procés contínuament, arribem a una magnitud que serà menor que la més petita de les magnituds inicials.

Aquesta proposició permet eludir l'infinit substituint-lo per quantitats que poden ser tan grans o tan petites com es vulgui.

Com a exemple d'aplicació del mètode d'exhaustió veurem la proposició 2 del llibre XII dels *Elements* d'Euclides que diu el següent:

> Els cercles son un a l'altre com els quadrats del seus diàmetres.



Sigui ABΓΔ, EZHΘ els cercles i BΔ, ZΘ els seus diàmetres. Jo dic que, el cercle ABΓΔ, és al cercle EZHΘ, com el quadrat BΔ és al quadrat ZΘ.

Ja que si el cercle ABΓΔ no fora al cercle EZHΘ com el quadrat de BΔ és al quadrat de ZΘ. Aleshores, com el quadrat de BΔ és al quadrat de ZΘ, el cercle ABΓΔ serà a un àrea menor 1ue el cercle EZHΘ o a una de major.

Sigui, en primer lloc, menor que una àrea Σ; inscriguis el quadrat EZHΘ en el cercle EZHΘ; aleshores el quadrat inscrit és major que la meitat del cercle EZHΘ; perquè si tracem tangents al cercle pels punts E,Z,H,Θ el quadrat EZHΘ és la meitat del quadrat circumscrit en torn del cercle i el cercle és menor que el quadrat circumscrit; de manera que el quadrat EZHΘ és major que la meitat del cercle EZHΘ. Divideixis en dues parts iguals les circumferències EZ, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE; aleshores cada un dels triangles EKZ, ZΛH, HMΘ, ΘNE, és major que la meitat del segment de cercle en que es troba: perquè si tracem tangents al cercle pels punts K, Λ, M, N i completem els paral·lelograms sobre les rectes EZ, ZH, HΘ, ΘE, cada un dels triangles EKZ, ZΛH, HMΘ, ΘEN serà la meitat del paral·lelogram en què es troba; però el segment en què es troba és menor que el paral·lelogram, de manera que cada un dels triangles EKZ, ZΛH, HMΘ, ΘNE, és major que la meitat del segment del cercle en què es troba. Llavors, si dividim en dos les circumferències restants i tracem rectes i procedim així successivament, deixarem alguns segments de cercle que seran menors que l'excés amb que el cercle EZHΘ excedeix l'àrea Σ: ja que s'ha provat en el primer teorema del llibre X que si es posen dues magnituds desiguals i es treu de la major una magnitud major que la seva meitat i, del que queda, es treu una magnitud major que la seva meitat i així successivament, quedarà una magnitud que serà menor que la magnitud menor dada.

Sigui, doncs, com s'ha dit, i considerem EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE els segments del cercle EZHΘ menors que l'excés amb que el cercle EZHΘ excedeix l'àrea Σ. Aleshores el polígon restant EKZΛHMΘN és major que l'àrea Σ. Inscrigui's en el cercle ABΓΛ el polígon AΞBOΓΠΔP semblant al polígon EKZΛHMΘN; aleshores, com el quadrat de BΔ és al quadrat de ZΘ, així el polígon AΞBOΓΠΔP és al polígon EKZΛHMΘN. Però, també, com el quadrat de BΔ és al quadrat de ZΘ, així, el cercle ABΓΛ és a l'àrea Σ; aleshores, com el cercle ABΓΛ és a l'àrea Σ, així el polígon AΞBOΓΠΔP és al polígon EKZΛHMΘN. Llavors, per alternança, com el cercle ABΓΔ es al polígon inscrit en ell, així, l'àrea Σ al polígon EKZΛHMΘN. Però el cercle ABΓΔ és més gran que el polígon inscrit en ell; per tant Σ també és major que el polígon EKZΛHMΘN. Però també és menor; cosa que és impossible. Llavors el cercle ABΓΔ no és un àrea menor que el cercle EZHΘ com el quadrat de BΔ és al quadrat de ZΘ. De manera semblant es provaria que el cercle EZHΘ tampoc és a un àrea menor que el cercle ABΓΔ com el quadrat ZΘ és al quadrat BΔ.

Dic ara que el quadrat BΔ

En llenguatge actual es tractaria de provar que:

$$\frac{A\overset{0}{B}\Gamma\Delta}{E\overset{0}{Z}H\Theta} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$$

Primer se suposaria que no és certa llavors es compliria alguna de les desigualtats, com per exemple:

$$\frac{A\overset{0}{B}\Gamma\Delta}{E\overset{0}{Z}H\Theta} < \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$$

Aleshores hauria d'existir algun àrea Σ que, en ser menor que el cercle

$$\Sigma < E\overset{0}{Z}H\Theta$$

acomplís que

$$\frac{A\overset{0}{B}\Gamma\Delta}{\Sigma} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$$

Aleshores es procediria a l'exhauriment:

1. Inscriuríem un quadrat
   que complís que la seva àrea fos major que la meitat del cercle
   $$EZ\Theta H > \frac{1}{2} E\overset{0}{Z}\Theta H$$
   Euclides ho prova construint un altre quadrat E'Z'Θ'H' que estigui circumscrit al cercle. Aleshores es compleix
   $$E'Z'\Theta'H' > E\overset{0}{Z}\Theta H$$
   $$E'Z'\Theta'H' = 2\, EZ\Theta H$$
   Igualant s'obté el resultat desitjat: que el quadrat inscrit és major que la meitat del cercle
   $$EZ\Theta H > \frac{1}{2} E\overset{0}{Z}\Theta H$$

2. A continuació dividiríem els arcs per la meitat i dibuixaríem les cordes corresponents. També aquí es compleix que l'àrea del triangle inscrit és major que la meitat del segment de cercle. Es a dir

$$E\overset{\Delta}{K}Z > \frac{1}{2} E\overset{0}{K}Z.$$

També aquí es procedeix a la demostració. Primer es completa el rectangle i es compleix que

$$2E\overset{\Delta}{K}Z = \text{rectangle } ZKE$$

però el $\text{rectangle } ZKE > E\overset{0}{K}Z$

Això implica que

$$E\overset{\Delta}{K}Z > \frac{1}{2}E\overset{0}{K}Z.$$

3. Llavors si procedim indefinidament arribaríem a una àrea que seria major que aquella que havien suposat inicialment: Σ . Per facilitar les coses suposarem que aquesta àrea és l'octògon $EKZ\Lambda HM\Theta N$. En conseqüència:

$$EKZ\Lambda HM\Theta N > \Sigma \quad (1)$$

I, per la proposició anterior (1, XII)

$$\frac{A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P}{EKZ\Lambda HM\Theta N} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$$

Però també

$$\frac{A\overset{0}{B}\Gamma\Delta}{\Sigma} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$$

$$\frac{A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P}{EKZ\Lambda HM\Theta N} = \frac{A\overset{0}{B}\Gamma\Delta}{\Sigma}$$

Ara bé pel fet que el polígon està inscrit en el cercle

$$A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P < A\overset{0}{B}\Gamma\Delta \Rightarrow EKZ\Lambda HM\Theta N < \Sigma \quad (2)$$

Afirmació que esdevé una contradicció respecte al que s'havia afirmat en la desigualtat (1)
Anàlogament es provaria que la desigualtat contrària porta, també, a una contradicció:

$$\frac{A\overset{0}{B}\Gamma\Delta}{\overset{0}{EZH\Theta}} > \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$$

En conseqüència l'enunciat de la proposició és cert i es compleix la igualtat:

$$\frac{A\overset{0}{B}\Gamma\Delta}{\overset{0}{EZH\Theta}} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$$

El mètode d'exhaustió va permetre eludir el concepte de límit i va permetre demostrar amb cert rigor algunes situacions que comportaven el pas al límit sense parlar directament de ell.

8. LES PARADOXES DE ZENÓ

La història de les paradoxes de Zenó és la història dels conceptes de: Continuïtat, infinit i infinitesimal.

Malauradament, no es conserva cap escrit de Zenó. L'únic que sabem de la seva vida ens ha arribat a traves de referències posterior. Es parla de Zenó a l'obra de Plató *Parmènides,* escrita uns seixanta anys després, a la *Física* d'Aristòtil, escrita cent anys més tard i en el *Comentari als vuit llibres d'Aristòtil* de Simplici, de mil anys després. Curiosament, Plató, que va viure en uns època més propera a Zenó no va reproduir les paradoxes però va discutir el seu propòsit: *atacar els defensors de la pluralitat de l'ésser.*

Zenó havia nascut a Elea aproximadament el 490 o 485 aC. segons narra Plató i va ser deixeble de Parmènides. Aleshores havia dues escoles. La pitagòrica que defensava la pluralitat de l'ésser i l'eleàtica que negava aquesta pluralitat.

L'escola pitagòrica considerava que l'ésser era divisible i per tant no era únic sinó plural. En conseqüència acceptaven el moviment i defensaven que l'espai estava compost per punts que eren considerats com unitats dotades de posició.

L'escola eleàtica negava la pluralitat de l'ésser perquè considerava que era únic i indivisible. En conseqüència creien que no hi havia moviment i s'oposaven als pitagòrics perquè consideraven l'espai compost per punts.

Plató explicava que precisament les paradoxes de Zenó tenien com a finalitat:

> protegir els arguments de Parmènides contra aquells que se'n reien d'ell i tractar de mostrar els resultats contradictoris i ridículs que es deriven de les interpretacions contràries a l'un.

Zenó pretenia demostrar la inconsistència dels conceptes de pluralitat i moviment. El mètode va consistir en partir d'unes premisses o hipòtesis defensades pels qui s'oposen i reduir-les a l'absurd. No es conserven les paradoxes relatives a la pluralitat en canvi se'n conserven quatre contra el moviment gràcies a Simplici.

8.1 Les paradoxes

a) La Dicotomia

"Tu no pots arribar a l'extrem d'un estadi. No pots franquejar en un temps finit un nombre infinit de punts, obligadament has de franquejar la meitat d'una distància donada qualsevol que sigui aquesta abans de franquejar-la. Y així successivament, «ad infinitum», de manera que hi ha un nombre infinit de punts en qualsevol espai donat i no pots tocar un nombre infinit d'aquells un darrere l'altre en un temps finit."

b) Aquil·les i la tortuga

"Aquil·les no avançarà mai la tortuga. Primer ha d'arribar al lloc on està la tortuga. Durant aquest temps la tortuga haurà fet un cert avanç. Aquil·les haurà de superar-lo i la tortuga s'aprofitarà per fer un nou espai de camí. Sempre s'aproximarà a ella però mai la superarà."

c) La Fletxa

“La fletxa que vola, en cada instant i en cada moment de la seva trajectòria està immòbil. Com que en un instant no hi ha moviment això implica que la fletxa estarà tots els instants en repòs i que per tant no es podrà moure.”

d) L’ Estadi

“Dos fileres de mòbils iguals en nombre i dimensió es mouen en un estadi a la mateixa velocitat i direcció contraria partint uns de la meta i els altres del punt central de l’estadi. Creu-te que en aquest cas la meitat del temps és igual al seu doble.”

Sigui A_1, A_2, A_3, A_4 quatre cossos d’igual dimensió en repòs i B_1, B_2, B_3, B_4, cossos de la mateixa dimensió que A que es mouen cap a la dreta uniformement de manera que cada B avança a cada A en un instant. A més, consideris quatre cossos més C_1, C_2, C_3, C_4, també de la mateixa dimensió que els A i que els B i que es mouen uniformement cap a l’esquerra respecte A de forma que cada un de C avança un de A en un instant indivisible de temps. Si C avança un instant i B avança un altre instant, resulta que C ha avançat 2 instants respecte a B. Això implicaria que un instant és igual al seu doble cosa que és impossible.

$$\begin{array}{lll} & A_1, A_2, A_3, A_4 & \\ B_1, B_2, B_3, B_4 \rightarrow & & \\ & \leftarrow\ C_1, C_2, C_3, C_4 & \end{array}$$

Kirk i Raven consideren que és millor tractar per separat els quatre arguments. Antigament hi havia dos teories sobre l’espai i el temps i les teories del moviment hi estaven directament relacionades. Hi havia qui considerava que l’espai i el temps eren infinitament divisibles. Això comportava que el moviment fos continu i uniforme. D’altres creien que l’espai i el temps es componien de mínims indivisibles, llavors el moviment esdevenia una successió de diminuts salts, una espècie d’espai cinematogràfic. Les dues primeres paradoxes de Zenó atacaven la primera visió de l’espai i del temps, les dues paradoxes següents anaven en contra de la segona concepció.

Brochard per la seva banda creia que les quatre paradoxes formaven una curiosa simetria. Mentre que la primera i la quarta consideraven el continu i el moviment entre límits donats, la segona i la tercera el consideraven en longituds intermèdies. A més, en la primera i en la tercera paradoxa, era un sol mòbil qui s’encarregava de fer el moviment que des del principi resultava impossible. En canvi, la segona i la quarta provaven que el moviment, encara que havia començat, no podia continuar i demostraven que tant el moviment relatiu con l’absolut eren impossibles.

Finalment, les paradoxes primera i segona provaven que el moviment era impossible degut a la naturalesa del moviment i lluitaven contra la divisibilitat indefinida del continu. En canvi les paradoxes segona i quarta confirmaven que el moviment no era possible tenint en compte la naturalesa del temps i, lluny de combatre’l, s’oposaven a que el continu fos indefinidament divisible.

> Les paradoxes de Zenó confirmen que els fonaments de les matemàtiques gregues travessaven una profunda crisi. L'essència d'aquesta crisi consistia en els frustrats intents de traslladar l'estructura de l'aritmètica de Pitàgores a la geometria. El caràcter discret de la sèrie de nombres que va servir al principi com a model de la geometria atomista, no va ser capaç de reflectir la natura de la continuïtat de l'espai, cosa que va conduir, en definitiva, a una clara comprensió de l'oposició essencial entre «natura discreta del nombre» i la «natura continua i homogènia de l'espai» (*Metodologia,* 1975: 24)

La conseqüència directa va ser la convicció que calia desenvolupar la geometria independentment de l'aritmètica. Així, mentre que a l'època pitagòrica les magnituds eren discretes i estaven associades a pedres, a l'època d'Euclides, les magnituds van ser associades a segments. El mon va passar a estar regit per la geometria.

8.2. Zenó d'Elea maltractat per la història

Zenó va ser maltractat i les seves teories mal compreses durant molt de temps. No obstant, a finals del segle XIX, fou recuperat i va ser considerat com el precursor de Weierstrass. La polèmica sobre les paradoxes de Zenó es redueix a dos classes d'interpretacions. Aquells que diuen que els seus arguments son sofismes barroers i els que es troben en la posició contrària i consideren que les paradoxes són uns raonaments subtils i impecables.

Dues opinions d'estudiosos destacats ens poden servir per aclarir millor el paper d'aquest filòsof grec.

Bertrand Russell en *Los principios de las matemáticas* diu respecte de Zenó:

> En este mundo caprichoso nada lo es más que la fama póstuma. Una de las víctimas más notables de la falta de juicio de la posteridad es el eleático Zenón. Habiendo inventado cuatro argumentos todos inconmensurablemente sutiles y profundos, la grosería de los filósofos subsiguientes lo consideró como un mero impostor muy ingenioso y juzgó a cada uno y a todos sus argumentos como sofismas. Al cabo de dos mil años de refutación continua esos sofismas fueron reinstaurados y transformados en el fundamento de un renacimiento matemático por un profesor alemán el que probablemente ni soñó en conexión alguna entre él y Zenón. Weierstrass, rechazó estrictamente todos los infinitesimales, ha demostrado en última instancia que vivimos en un mundo inmutable y que la flecha en cada instante de su vuelo se halla realmente en reposo. El único punto en que Zenón probablemente erró fue en inferir (si es que lo hizo) que debido a que no hay cambio, el mundo debe tener el mismo estado en un instante y en otro. Esta consecuencia no se deduce en modo alguno, y en este punto el profesor germano es más constructivo que el ingenioso griego". (RUSSELL, 1995: 109)

Abel Rey també recupera la figura de Zenó i critica els que menyspreen les seves argumentacions:

> Los que acusan a Zenón de sofista reivindican hasta cierto punto la autoridad de Aristóteles, pues combate éste y acusa de paralogismo una de las cuatro argumentaciones de Zenón contra el movimiento. Se puede apoyar también en que el procedimiento inaugurado por Zenón va a ser el que utilicen los sofistas y el eléata fue maestro del sofista como el médico puede serlo del envenenador (REY, 1961: 108)

8.3. Aristòtil i l'infinit

Aristòtil es refereix a l'infinit en tres apartats de la seva obra. A la *Física* (III. 4-8), al *De Caelo* (I, 5-7) i a la *Metafísica (XI, 10).*

Per Aristòtil l'infinit és un assumpte que havia de tractar la física. No obstant acceptava de tractar-lo a les matemàtiques per dues raons. La primera és perquè la sèrie de nombres naturals no té fi. La segona, perquè un segment pot ser dividit un nombre infinit de vegades.

Per Aristòtil havia dos tipus d'infinit: l'infinit potencial i l'infinit en acte. El primer s'havia d'interpretar com la possibilitat de procedir sempre més enllà sense que existeixi un darrer element. La successió de nombres naturals respon a aquesta idea. El segon creu que no existeix. La infinitud en acte no pot ser perquè no hi és present en cap nombre concret i no és troba en la realitat sinó en el pensament (MONDOLFO, 1971).

Tampoc hi veia infinit en acte en el continu. Per Aristòtil, el continu era allò que es podia dividir en un nombre infinit de parts sempre divisibles. Aleshores seguia tractant-se d'un procés però no d'una realitat. El continu es presentava en la successió $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ ja que el procés de la suma és infinit però el resultat és finit $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$

Tots dos, continu i infinit eren considerats com a processos i no com a resultats.

Aristòtil presentava una argumentació amb la que pretenia refutar les paradoxes de Zenó.

> Por lo que también el argumento de Zenón es falso al afirmar que no es posible recorrer las cosas infinitas o entrar en contacto separadamente con ellas en un tiempo finito.
>
> Pues de dos maneras se dice que son infinitos la longitud i el tiempo y, en general, todo lo que es continuo. O respecto a su divisibilidad o respecto a sus extremos.
>
> Mientras que no es posible entrar en contacto con las cosas cuantitativamente infinitas en un tiempo finito, si que lo es respecto a la divisibilidad, pues también el tiempo es, en este sentido infinito; de manera que se recorre lo infinito en un tiempo infinito y no en uno finito y se entra en contacto con las cosas infinitas no mediante momentos finitos sino numéricamente infinitos (MONTESINOS, 1971: 113).

L'opinió d'Aristòtil ha generat alguna interpretació com la presentada per Paul Tannery que deia que, malgrat l'opinió anterior, l'estagirita tenia un respecte per Zenó i el considerava com el creador de la dialèctica i que fins i tot va ser influït per ell. El rebuig d'Aristòtil per l'infinit actual seria el reflex del temor a les dificultats lògiques que plantejaven els arguments de Zenó.

L'infinit actual aristotèlic va tenir dues interpretacions posterior en Agustí de Tagaste (354-450 dC) *De Civitate Dei*. On aquest pare de l'Església creia que en Deu hi havia infinits i parlava dels infinits actuals que hi ha a la ment de Deu.

> Todo número está caracterizado por su propiedad, así que dos cualesquiera son distintos. Por tanto los números son distintos, y tomados singularmente son finitos y tomados todos juntos son infinitos.
>
> Dios, entonces, a causa de su infinidad los conoce todos. ¿Como sería posible que la ciencia de Dios conociese unos números e ignorase otros? ¿El que sostuviese esto no será un demente? (MONTESINOS, 1971: 124).

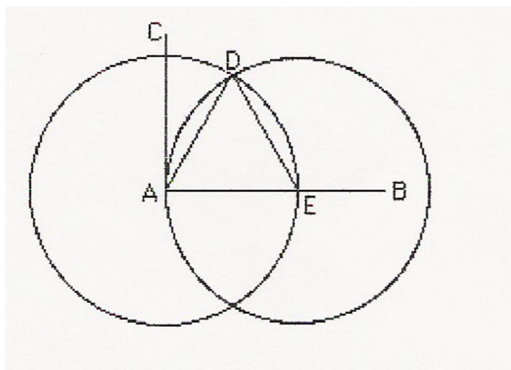
Arquímedes en el *Mètode* suposava que una regió plana estava composta per infinites cordes paral·leles a una direcció donada. És una subdivisió actual d'un continu en infinites parts. Una cosa és afirmar que un continu pot ésser dividit en parts (*infinit potencial)* i una altra és imaginar la subdivisió realitzada completament saltant del finit a l'infinit (*infinit actual)*

Arquímedes recorre a l'infinit actual com a instrument tècnic que li serveix d'ajuda. Amb aquest mètode va quadrar la paràbola.

9. LA TRISECCIÓ DE L'ANGLE

Dels tres problemes que van preocupar els grecs, duplicació del cub, quadratura del cercle i trisecció de l'angle, aquest tercer presenta dos diferències respecte els anteriors. Primer que no hi ha cap història que expliqui com i perquè va començar a ser estudiat. I segon, que a diferència dels dos primers problemes, és possible resoldre certs casos particulars amb regle i compàs. Per be que és impossible trobar un mètode per trisecar un angle qualsevol utilitzant únicament aquelles eines euclídees.

Així, es pot trisecar un angle recte BAC amb regle i compàs. Caldrà traçar un cercle de centre A el qual permetrà determinar sobre els costats els punts C i E. Amb centre E es dibuixarà un altre cercle de radi EA. Tots dos cercles es tallaran en el punt D. Si unim els punts D, A i E obtenim un triangle equilàter. Això vol dir que l'angle DAE és de 60º i que s'ha trisecat l'angle recte BAC ja que DAC en val 30º.



Definició del problema: Trisecar un angle consisteix en dividir un angle arbitrari en tres parts iguals utilitzant únicament regle i compàs (REY, 1961: 81).

9.1 Origen del problema

Ja hem dit que no hi ha cap història ni se sap quin és l'origen d'aquest problema. No obstant, és probable que la preocupació per dividir un angle en un nombre qualsevol de parts sorgís per analogia a la divisió d'un segments en parts.

De fet, des de l'època de Tales l'estudi dels angles va ser una constant de l'esperit grec. El mateix Proclo atribuïa a Tales haver provat els següents teoremes:

1) El diàmetre divideix el cercle en dues parts iguals.
2) Els angles oposats pel vèrtex són iguals
3) Els angles de la base d'un triangle isòsceles són iguals
4) L'angle d'un semicercle és recte.

Tanmateix, Heath posa en dubte que Tales fes la demostració de manera rigorosa i pensava que, molt probablement, va donar-se compta que els triangles complien aquestes propietats. De fet, Tales no concebia els angles com a magnituds sinó només com a qualitats. Angle era, per ell, quelcom similar a una inclinació d'un vessant d'una piràmide (HEATH, 1981) (EVES, 1983).

Un altre problema que va poder suggerir la necessitat de la trisecció va ser la construcció de l'eneàgon. De fet el problema de construir un polígon inscrit en un cercle amb regle i compàs comportava la divisió d'angles en parts iguals. Així, si es dividia un angle de 360º en tres parts s'obtenia un triangle i si es dividia en sis parts, un hexàgon. Ara bé, el problema de trisecar un angle qualsevol es plantejaria quan es va tractar de construir un polígon de nou costats.

El problema de la construcció de polígons regulars inscrits va perllongar-se fins el segle XVIII. Tot i que aviat descobriren que era impossible la construcció d'un heptàgon, va caldre esperar fins 1796 per saber quan un polígon podria ser construït amb regle i compàs. Gauss, a més de la construcció d'un polígon de 17 costats, va donar una resposta a aquesta pregunta:

> "Un polígon regular de p costats amb p nombre primer major que 2 es podrà construir amb regle i compàs si i només si p és de la forma $2^{2^t} + 1$ amb t =0,1,2,..."

Aquesta proposició dóna com a resultat 3, 5, 17, 257, 65.537...

9.2 La neuseis (νευσις)

Neuseis significa inserció, intercalació. Intercalar o insertar segments d'una magnitud donada era una tècnica habitual a la geometria grega, però era aliena a les eines euclídees del regle i del compàs, ja que el regle euclidi no estava graduat i per tant no servia per traslladar o intercalar segments.

Aquesta tècnica ja era coneguda i emprada a l'època d'Hipocrates de Quios i Pappos recull un parell d'enunciats que proven la seva la utilització:

> 1. Donat un rombe, un dels costats del qual està perllongat, insertar un segment donat de recta en l'angle extern, de manera que passi per l'angle oposat.
>
> 2. Donat un cercle insertar una corda de longitud donada i que passi per un punt també donat.

La neuseis va permetre, a més, donar resposta al problema de la trisecció (REY, 1961:80).

9.3 Reducció de la trisecció a un problema d'inserció

Sigui un angle agut A$\hat{B}$C. Tot angle com aquest pot ser agafat com un angle entre una diagonal BA i un costat BC d'un rectangle. Així, dibuixem AC perpendicular a BC i completem el paral·lelogram ABCF. Perllonguem FA i tracem la recta BE de manera que talli AC en D i que es compleixi DE=2AB. Després marquem G com a punt mitjà i aleshores es compleix

$$DG=GE=AG=AB$$

I en conseqüència

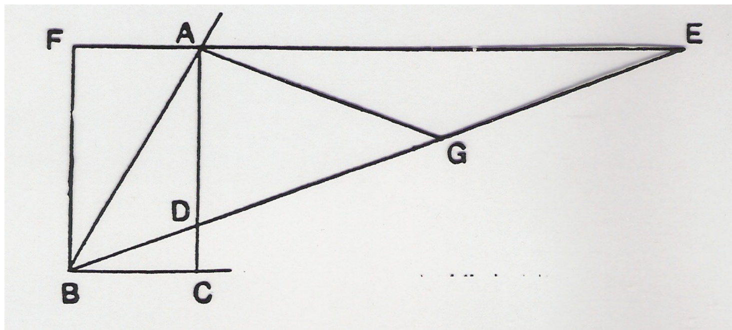
$$A\hat{B}G = A\hat{G}B = 2A\hat{E}G = 2D\hat{B}C$$

Llavors queda clar que

$$D\hat{B}C = \frac{1}{3}A\hat{B}C$$

El problema es redueix a construir un segment DE de longitud igual a 2AB i insertar-lo entre AC i la prolongació de FA

I viceversa: Si podem marcar un regle amb un segment DE=2AB i ajustar-lo de manera que passi per B i, a més que D i E estiguin en AC i FA respectivament, aleshores s'haurà trisecat l'angle.



Potser una de les raons que hagi fet aquest problema menys atractiu és que la solució anterior, encara que no és pot fer amb regle i compàs no es gens difícil. Només cal marcar sobre un regle una distància que sigui 2AB i lliscar el regle fins que ocupi el lloc apropiat de manera que un extrem estigui sobre AC i l'altre sobre FA i que a més passi per A.

La proposició 32 de la *Col·lecció Matemàtica* de Pappos detalla de manera retòrica aquesta demostració en els termes següents:

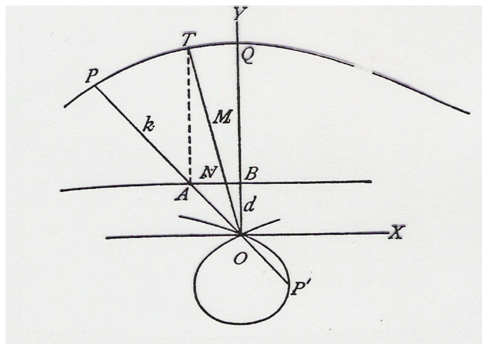
> "Demostrat l'anterior, la trisecció d'un angle rectilini donat es farà de la manera següent:
>
> En efecte, consideris que l'angle comprés per les rectes AB i BC sigui primer agut; tracem des d'un punt qualsevol la perpendicular AC i, completant el paral·lelogram CF, prolongarem la recta FA fins al punt E. A més, essent el paral·lelogram CF rectangle, posem, entre les rectes EA i AC, la recta DE inclinada sobre el punt B, igual al doble de la recta AB (ja que anteriorment s'ha explicat com això es pot fer). Llavors, jo dic que l'angle comprés sota les rectes EB i BC és la tercera part de l'angle donat comprés per les rectes AB i BC.
>
> En efecte, tallem la recta ED en dues parts iguals pel punt G i dibuixem la recta d'unió AG. Llavors, les tres rectes DG, GA i GE son iguals; en conseqüència, la recta DE és el doble de la recta AG. Però, ella també és doble de la recta AB; Ja que la recta BA és igual a la recta AG i l'angle comprés sota les rectes AB i BD és igual al que està comprés per les rectes AG i GD. Però, l'angle comprés per les rectes AG i GD és doble del que està comprés per les rectes AE i DE, és a dir del que està comprés per les rectes DB i BC; Així, l'angle comprés per les rectes AB i BC és doble, també, del que està comprés per les rectes DB i BC; i si tallem l'angle comprés per les rectes AB i BD en dos parts iguals, l'angle comprés per les rectes AB i BC estarà tallat en tres parts iguals."

D'aquesta manera el problema de trisecar queda reduït a un problema de neuseis o inserció.

9.4 La Concoide de Nicomedes

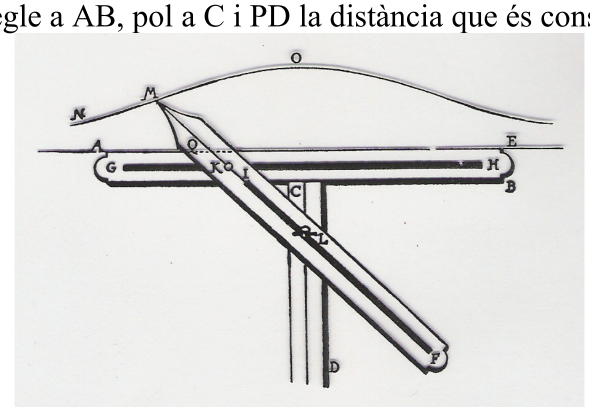
Gairebé no hi ha dades sobre Nicomedes. Per situar el període en què va viure cal recórrer a dues informacions referent al seus treballs. Se sap, en primer lloc, que va criticar els treballs d'Eratòstenes sobre la seva solució per a duplicar el cub i aquest matemàtic grec va viure entre 276 aC i el 194 a C. En segon lloc Apol·loni de Perga parlava d'una corba germana de la concoide cosa que significa que ja coneixia la descoberta per Nicomedes. Apol·loni va viure entre 262 aC i el 194 aC. En conseqüència no es desencertat situar Nicomedes aproximadament entre 280 aC i 210 aC.

Nicomedes és famós perquè en un tractat perdut va descriure la corba anomenada concoide. Es creu que aquest matemàtic grec la va definir considerant una recta AB i punt exterior O. QBO és la perpendicular a AB que passa per O i talla en B. La longitud BQ té un valor fix b. Aleshores si es fa rotar la recta OBQ al voltant de O s'obtenen diverses posicions com OAP de manera que AP=b.

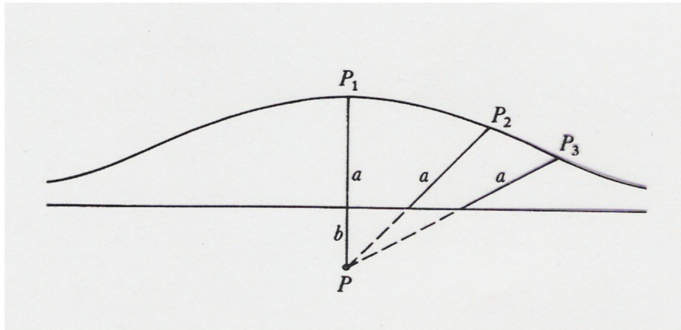


La concoide es pot construir per mitjans mecànics. Es tracta de construir un regle AB amb una ranura i un altre regle FE que es fixa a AB de manera perpendicular per la seva meitat. El regle FE té un piu a C. A més es construeix un tercer regle acabat en punta que té un piu D que s'introdueix a la ranura AB i una ranura en la qual es situa el piu C.

Nicomedes anomenà regle a AB, pol a C i PD la distància que és constant.



Aquesta corba té una propietat fonamental que ja hem apuntat abans i que consisteix en què els vectors traçats des de P cap a la corba, com PP_1, PP_2, etc, són de tal manera que la longitud interceptada de radi vector entre la corba i la recta AB és constant i igual a *a*.



Actualment les equacions cartesianes i polars d'aquesta corba són les següents:

Equació cartesiana

$$(x - a)^2 (x^2 + y^2) - b^2 x^2 = 0$$

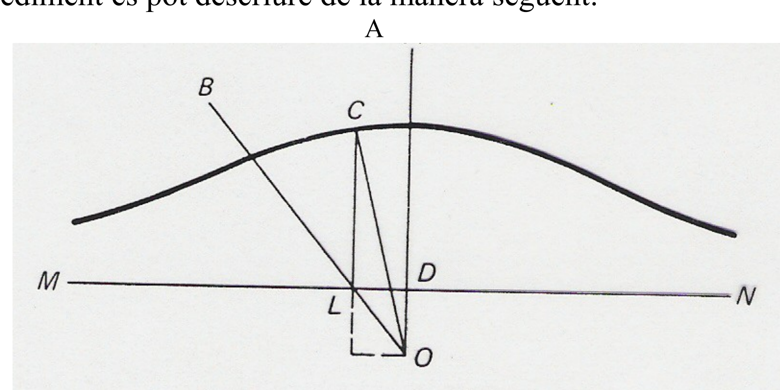
Equació polar

$$r = b + a \sec\theta$$

Però Nicomèdes no coneixia aquestes equacions i solament sabia les propietats de la concoide i com construir-la per procediments mecànics. D'aquesta manera la faria servir per a la trisecció.

9.5. La concoide per trisecar l'angle

Pappos en la *Col·lecció Matemática* indica que fou Nicomedes qui va aplicar la seva corba a la trisecció. El procediment es pot descriure de la manera següent:

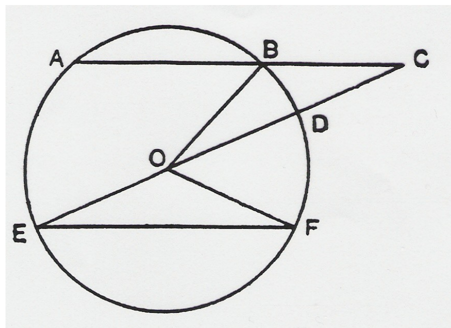


Sigui $A\hat{O}B$ l'angle agut que es vol trisecar. Dibuixem MN perpendicular a OA de manera que talli OA en D i OB en L. Després dibuixem la paral·lela a OA que talli la concoide en C. Aleshores OC triseca l'angle $A\hat{O}B$

9.6 Neuseis amb l'ajut d'una circumferència

En un manuscrit àrab anomenat *Liber Assumptorum* apareixen un seguit de demostracions que es creu que pertanyien a Arquímedes. Tanmateix aquesta no era una obra del siracusà però en ella se'l citat diverses vegades cosa que fa pensar que bona part del que hi ha en aquest llibre pertany a aquest autor grec. Una d'aquestes demostracions resol la trisecció d'un angle amb l'ajut d'una circumferència mitjançant el procediment de la inserció d'un segment o neuseis. Consisteix en el següent:

Sigui AB qualsevol corda del cercle de centre O. Perllonguem AB fins a C de manera que BC sigui el radi del cercle. La recta CO troba el cercle en dos punts D i E. Amb aquesta construcció es pot concloure que $\widehat{AE} = 3\widehat{BD}$



La demostració és bastant senzilla. Primer dibuixem EF paral·lel a AB i unim O amb B i F. Per construcció BO=BC per tant $B\overset{\Delta}{O}C$ és isòsceles i llavors $B\hat{O}C = B\hat{C}O$.

A més $C\hat{O}F = 2D\hat{E}F$ per estar el primer angle centrat i l'altre sobre el cercle i abastar tots dos el mateix angle.

A més, per angles entre paral·leles i per ser el triangle $B\overset{\Delta}{O}C$ isòsceles es compleix:

$$C\hat{O}F = 2D\hat{E}F = 2B\hat{C}O = 2B\hat{O}C$$

Aleshores

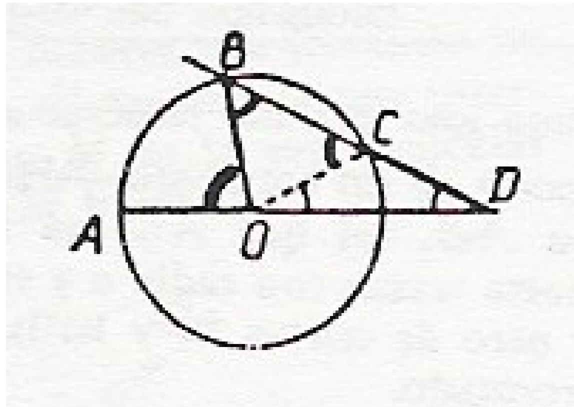
$$C\hat{O}F = 2B\hat{O}C$$

$$B\hat{O}F = C\hat{O}F + B\hat{O}C = 2B\hat{O}C + B\hat{O}C = 3B\hat{O}C$$

En conseqüència $\widehat{BF} = \widehat{AE} = 3\widehat{BD}$ i s'ha aconseguit trisecar l'angle o l'arc (SMITH, 1958:297).

Resulta clar que aquesta solució d'Arquimedes és un exemple més de neuseis ja que si disposem d'un angle AOB i el volem trisecar només ens caldrà construir un cercle de centre O i amb una tira de paper en la qual s'hagi assenyalat un segment igual al radi tractarem d'insertar-lo entre el cercle i la recta AO passant per B. D'aquesta manera obtindrem el punt D que complirà

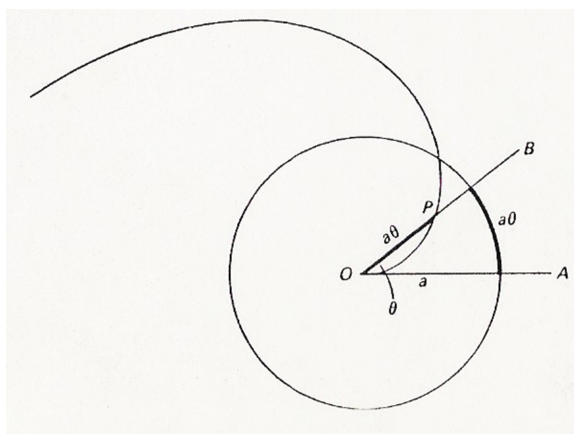
$$B\hat{D}A = \frac{1}{3}A\hat{O}B$$



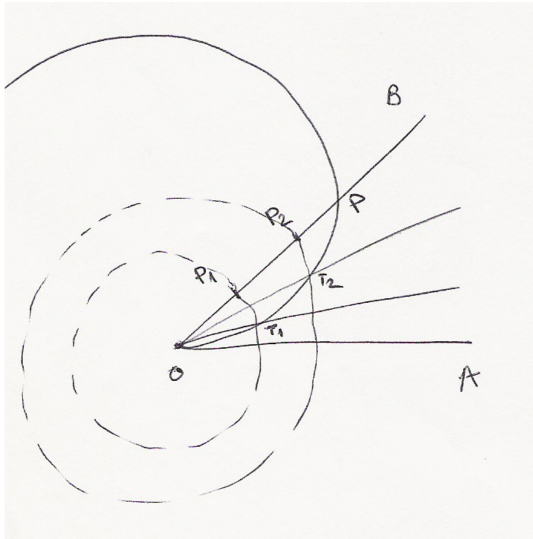
9.7. Trisecció amb l'ajut de l'espiral d'Arquímedes

L'espiral d'Arquímedes és una corba mecànica que s'obté quan se sotmet un punt a la conjunció de dos moviments uniformes, el primer rectilini i el segon circular. Així, s'obté una espiral si el punt O es desplaça en línia recta al llarg d'OA amb una velocitat constant i al mateix temps la recta OA gira al voltant de O amb un moviment circular i uniforme de manera que en tot moment es compleixi que la distància rectilínia recorreguda per O sigui proporcional a l'angle de gir de OA.

$$r = a\theta$$



L'espiral també serveix per trisecar un angle ja que si OP=aθ aleshores es fàcil veure que $\frac{OP}{3} = a\frac{\theta}{3}$. Així doncs es podrà trisecar l'angle dividint el segment PO en tres parts iguals.



Si es vol trisecar l'angle AOB caldrà dibuixar l'espiral de centre O. Aquesta corba tallarà OB en un punt P. Aleshores dividirem OP en tres parts iguals. Amb radis respectius OP_1 i OP_2 i centre O traçarem respectius cercles els quals tallaran l'espiral en T_1 i T_2. Les rectes OT_1 i OT_2 seran les que trisecaran l'angle donat.

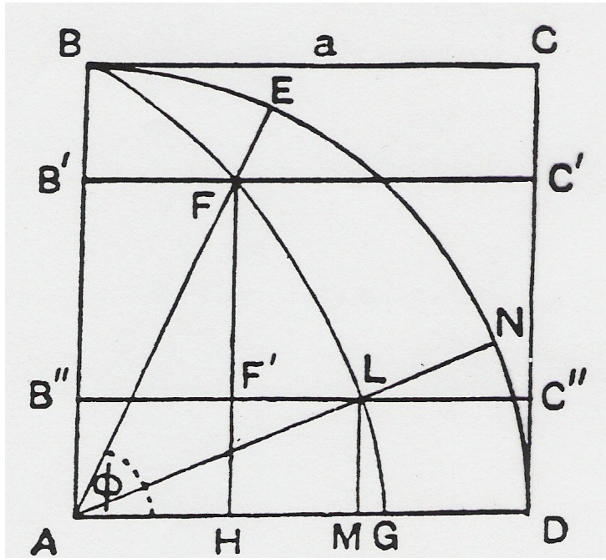
9.8. Trisecció mitjançant la quadratriu

Pappos en la proposició 35 de la *Col·lecció Matemàtica* descriu un mètode per utilitzar la quadratriu per trisecar l'angle. La quadratriu era una corba mecànica inventada per Hippies d'Elis i que s'emprava per quadrar el cercle.

Per construir una quadratriu cal suposar que es disposa d'un quadrat ABCD i en ell un quart de cercle BED de centre A i radi AB. Si suposem que el radi del cercle es mou uniformement des de AB a AD i, al mateix temps el costat BC del quadrat es mou sempre paral·lel a ell mateix amb un moviment també uniforme. Aleshores, la quadratriu és la línia formada pels punts intersecció d'aquests dos segments: el radi AB i el costat BC.

Per les característiques de la seva construcció, la quadratriu compleix la propietat següent: L'angle BAD és a l'angle EAD com l'arc BED és a l'arc DE com el segment AB és al segment FH.

$$\frac{B\hat{A}D}{E\hat{A}D} = \frac{B\widehat{E}D}{E\widehat{D}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{FH}}$$



Per trisecar l'angle FAD amb la quadratriu només cal construir aquesta figura i dividir el segment FH en tres parts iguals i traslladar el segment F'H resultant fins que talli la quadratriu en L. Llavors, per la propietat d'aquesta corba, es compleix que:

$$\frac{E\hat{A}D}{N\hat{A}D} = \frac{\overline{F}\overline{H}}{\overline{F'}\overline{H}}$$

El text de la proposició 45 és prou clar i recull de forma retòrica el que acabem d'explicar:

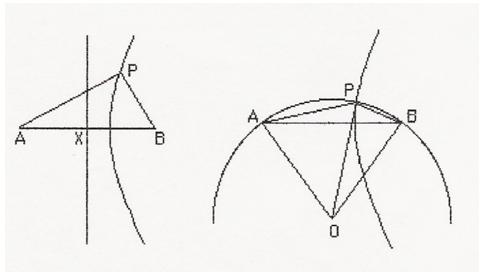
> "Tallar un angle o un arc donat en tres parts iguals és un problema sòlid, com hem demostrat més amunt, mentre que tallar un angle o un arc donat en una raó donada és un problema gràmic; no obstant l'exposarem també de les dues maneres.
>
> En efecte, sigui l'arc $\Lambda\Theta$ del cercle K$\Lambda\Theta$, i que calgui tallar aquest arc en una raó donada.
>
> Tracem les rectes ΛB i $B\Theta$ sobre el cercle i la recta BK en angle recte amb $B\Theta$. Dibuixem la línia quadratriu KA$\Delta\Gamma$ per K i tallem la recta AE, traçada perpendicularment, en el punt Z de manera que la raó de la recta AZ a la recta ZE sigui la relació donada segons la qual volem dividir l'angle. Dibuixem la recta ZΔ paral·lela a la recta B Γ; tracem la recta B Δ i la perpendicular ΔH. Llavors, en virtut de la propietat de la línia, l'angle comprés per les rectes AB i $B\Gamma$ és a l'angle comprés per les rectes ΔB, $B\Gamma$ com la recta AE és a la recta ΔH, és a dir a la recta ZE. Per tant, per divisió, l'angle comprés per les rectes AB i $B\Delta$ és a l'angle comprés, ΔB, $B\Gamma$, és a dir que l'arc ΛM és a l'arc $M\Theta$, com la recta AZ és a la recta ZE, .es a dir en la raó donada."

Pappos sosté que trisecar un arc és un problema sòlid, cosa que vol dir irresoluble amb regle i compàs, mentre que dividir un arcs segons una raó donada és un problema gràmic, cosa que vol dir que no és resoluble ni amb el recurs a les còniques (VERA, 1978: 54).

9.9. Trisecció amb la hipèrbola

Pappos va escriure sobre un procés atribuït a Apol·loni amb el qual es podia utilitzar les còniques per trisecar l'angle. La solució proposada comporta dibuixar una hipèrbola.

Primer mostra que si AB és un segment. El punt P que compleix que $2P\hat{A}B = P\hat{B}A$ pertany a una hipèrbola d'excentricitat 2, de focus B i de directriu la perpendicular que a AB pel seu punt mig.



Aquesta hipèrbola també serveix per trisecar l'angle AOB. Amb centre O es traça un cercle que passi per AB. Després es construeix la hipèrbola d'excentricitat 2, de focus B i de directriu la mediatriu d'AB. Aquesta talla el cercle en P. Aleshores PO triseca l'angle AOB.

Amb la propietat de la paràbola descrita anteriorment

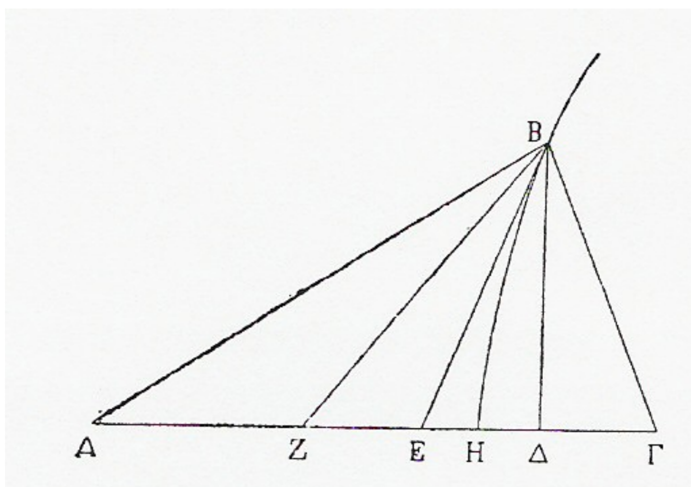
$$2P\hat{A}B = P\hat{B}A$$

pero $2P\hat{A}B = P\hat{O}B$ i $2P\hat{B}A = P\hat{O}B$

perquè per al mateix arc els angles de vèrtex en el centre del cercle valen el doble que els angles que el tenen sobre la circumferència.

$$2P\hat{O}B = P\hat{O}A$$

Aquesta solució de Pappos mostra els esforços dels grecs per resoldre el problema de la trisecció de l'angle. Des de les solucions mecàniques van evolucionar fins a les solucions que implicaven les còniques



La proposició 34 del llibre IV de la *Col.lecció matemàtica* de Pappos proporciona la base teòrica per l'utilització de la hipérbola en la trisecció d'un angle.

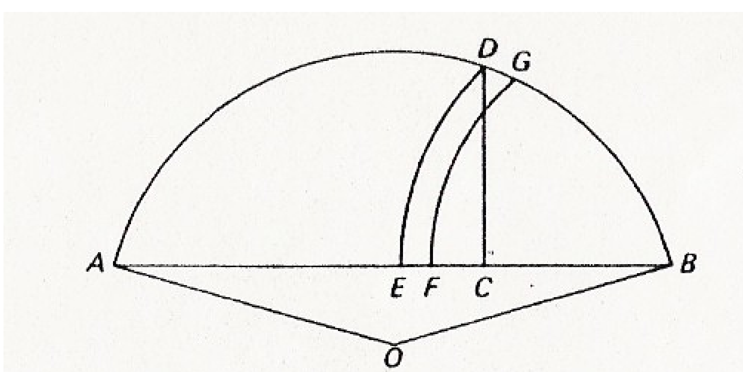
> "Independentment de la inclinació, la tercera part d'un arc donat es pot obtenir d'una altra manera, per mitjà d'un lloc sòlid com el següent: Doni's una recta que passi per dos punts A i Γ, dibuixem unes rectes per A, B i Γ de manera que l'angle comprés per les rectes AΓ i ΓB sigui el doble que l'angle comprés per les rectes ΓB i AB. Jo dic que el punt B pertany a una hipèrbola."

L'enunciat proposa utilitzar una hipèrbola per obtenir el punt B que permeti aconseguir un angle $A\hat{\Gamma}B$ doble d'un altre $B\hat{A}\Gamma$. El text de la demostració és el següent:

> "Tracem la perpendicular BΔ i marquem una recta ΔE igual a la recta ΓΔ. Després unim els punts B i E i obtenim la recta BE igual a AE. Marquem també EZ igual a ΔE. S'obté que la recta ΓZ és el triple que la recta ΓΔ i que la recta AΓ sigui igualment el triple que la recta ΓH. S'obté que el punt H és donat i que la recta restant AZ és el triple que la recta HΔ. I, donat que el quadrat de la recta BΔ és l'excedent dels quadrats de les rectes BE; EZ, el rectangle comprés sota les rectes ΔA i AZ és també l'excedent d'aquest mateix quadrat; Llavors, el rectangle comprés sota les rectes ΔA i AZ, és a dir el triple del rectangle comprés per les rectes AΔ i ΔH, equival al quadrat de la recta BΔ.
>
> En conseqüència, el punt B és sobre la hipèrbola el seu costat transversal de la qual, aplicat seguint l'eix, es troba sobre la recta AH i el costat recte de la qual és el triple de la recta AH. I resulta clar que el punt Γ talla, contra el vèrtex H de la secció, la recta ΓH que és la meitat del costat transversal AH de la figura.
>
> Llavors la síntesi es evident. En efecte cal tallar la recta AΓ de manera que la recta AH sigui el doble que la recta HΓ i descriure, al voltant de la recta AH com a eix, pel punt H, la hipèrbola el costat recte de la qual sigui el triple de la recta AH; Després demostrar que ella realitza la relació de doble dels angles que hem proposat. I es veurà fàcilment que la hipèrbola descrita d'aquesta manera talla un arc donat de cercle en tres parts si se suposa que els punts A i Γ son les extremitats d'aquest arc."

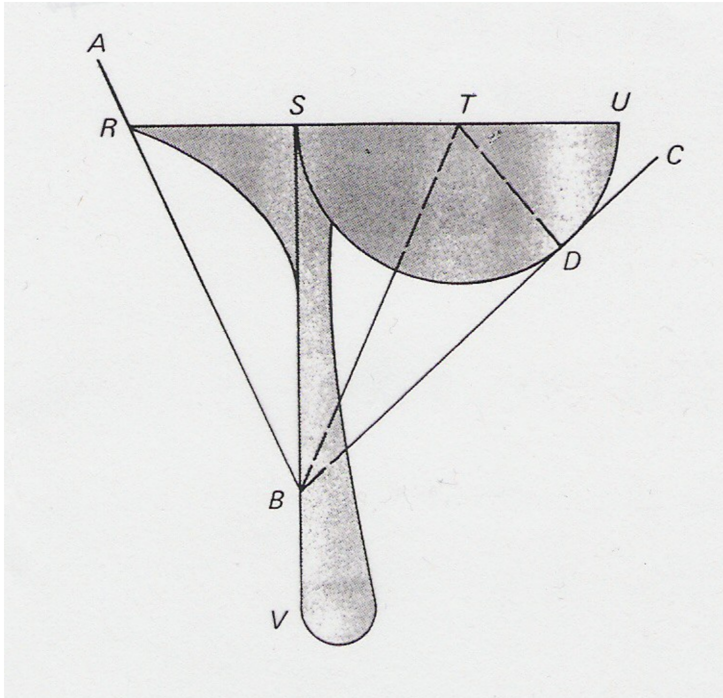
9.10. Alguns mètodes per trisecar posteriors a l'antiguitat grega

Al 1525, Durer va proporcionar un mètode que trisecava un angle de manera aproximada utilitzant únicament regle i compàs. Si l'angle que es volia trisecar era AOB, llavors es traçava el segment AB i amb centre el seu punt mig es dibuixava un semicercle. Tot seguit s'assenyalava el punt C que trisecava el segment AB i per ell s'aixecava la perpendicular, la qual tallava el semicercle en D. Amb centre B i radi BD es traçava un arc que tallava el segment AB en el punt E. A continuació es trisecava el segment EC i s'obtenia F. Després amb centre B i radi BF es tornava a dibuixar l'arc que determinava sobre la semicircumferència el punt G. Aleshores OG trisecava l'angle AOB amb un error de 1" per un angle de 60º i de 18" per a un de 90º.



Al 1835 es va descriure un instrument d'autor desconegut que permet trisecar l'angle. S'anomena Tomahawk.

Per construir-lo es traça el segment RU i es divideix en 3 parts mitjançant S i T. Tot seguit es dibuixa el semicercle de diàmetre SU. Per S es traça la perpendicular SV a RU i es completa l'instrument



Per trisecar l'angle ABC cal situar R sobre el costat AB, el vèrtex B sobre SV i l'altre costat BC secant al cercle SDU. Aleshores, la recta BT triseca l'angle. Només cal tenir en compte que els triangles RSB, TSB i TDB són congruents

10. LA QUADRATURA DEL CERCLE

Dels tres problemes clàssics de la matemàtica grega, el de la quadratura és el més conegut i el que més pàgines ha omplert i més ha fascinat a matemàtics i aficionats no sols a l'època clàssica sinó del segles posterior fins el segle XIX.

No obstant, abans de conèixer els orígens del problema cal detenir-se en un altre problema similar, el de la quadratura de les lúnules, que per la similitud amb la quadratura del cercle tal vegada va animar els matemàtics grecs a afrontar aquest darrer amb una certa confiança d'èxit.

10.1 La quadratura de les lúnules

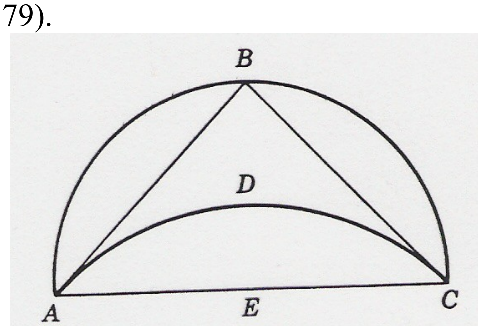
Tradicionalment s'ha atribuït a Hipòcrates de Quios, del segle V aC. haver trobat un mètode per quadrar unes figures limitades per arcs de cercle: les lúnules. Temisti en el *Comentari a Aristòtil* deia:

> "Per exemple: Hipòcrates, el de Quios, i Antifont, els dos es posaren a fer la quadratura del cercle. Y el geòmetra ha de resoldre l'error d'Hipòcrates, ja que conservant els principis, va contra raó. Perquè no havent fet més que quadrar el menisc, circumscrit al voltant del costat del quadrat inscrit en el cercle, va agafar per a tota demostració de quadrar el cas particular de la quadratura del menisc"

10.1.1 Primera quadratura de la lúnula

Sigui la lúnula construïda de manera següent. Tracem un semicercle ABC sobre el segment AC agafant aquest com a diàmetre. En ell inscrivim un triangle rectangle isòsceles ABC. Amb centre la intersecció de les perpendicular a AB i BC, traçades respectivament per A i C, dibuixem un arc de cercle ADC. La lúnula que volem quadrar és ABCD.

Hipòcrates va provar que quadrar la lúnula ABCD era igual que quadrar el triangle rectangle isòsceles ABC (BOYER, 1986:79).



Per provar-ho només cal tenir en compte la proposició següent:

Els segments de cercle semblants estan entre si en la mateixa relació que els quadrats construïts a les seves bases:

$$\frac{segm.APB}{\overline{A}\overline{B}^2} = \frac{segm.BQC}{\overline{B}\overline{C}^2} = \frac{segm.ADC}{\overline{A}\overline{C}^2}$$

Si considerem que la proporció és manté si sumem els numeradors i els denominadors dels termes proporcionals, obtenim:

$$\frac{segm.APB + segm.BQC}{AB^2 + BC^2} = \frac{segm.ADC}{AC^2}$$

Ara bé com que $AC^2=AB^2+BC^2$ pel teorema de Pitàgores, es compleix que:

$$segm.APB + segm.BQC = segm.ADC$$

Per conseqüent:

la lúnula ABCD= triangle ABC

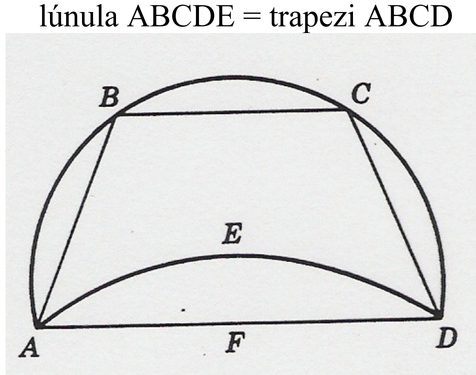
El triangle isòsceles es pot quadrar molt fàcilment considerant com a costat del quadrat equivalent la meitat del seu costat gran.

10.1.2 Altres quadratures

Eudem va citar algunes altres quadratures que Hipòcrates havia aconseguit.

L'àrea de la lúnula igual a la del trapezi inscrit.

lúnula ABCDE = trapezi ABCD

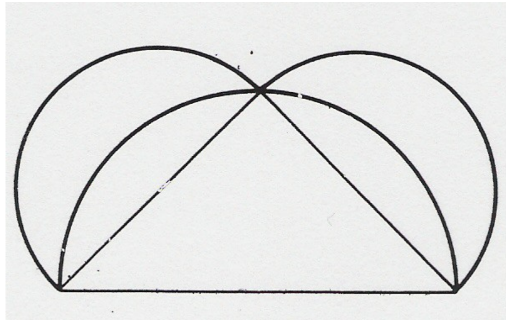


Aquesta igualtat únicament es compleix si AB=CD, és a dir si el trapezi és isòsceles i a més es compleix que $AD^2=AB^2+BC^2+CD^2$

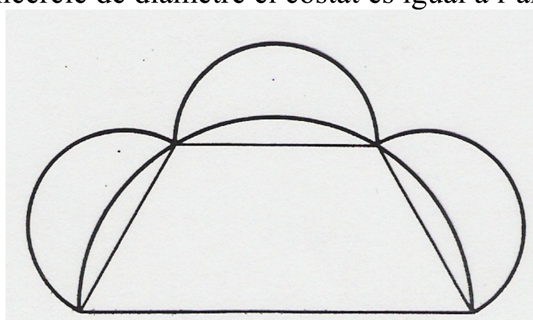
Perquè en virtut de les proposicions anteriors:

$$\frac{segm.AB}{AB^2} = \frac{segm.BC}{BC^2} = \frac{segm.CD}{CD^2} = \frac{segm.AB + segmBC + segm.CD}{AB^2 + BC^2 + CD^2} = \frac{segm.AD}{AD^2}$$

Les lúnules construïdes sobre els costats petits d'un triangle isòsceles són iguals al triangle. Aquesta quadratura es construeix dibuixant semicercles sobre els costats petits d'un triangle isòsceles i un altre semicercle amb diàmetre la hipotenusa.



Si construïm lúnules sobre els costats d'un trapezi isòsceles amb tres costats igual, les àrees de les tres lúnules més el semicercle de diàmetre el costat és igual a l'àrea del trapezi.



Aquesta darrera quadratura, al sortir el semicercle, semblava obrir el camí a la quadratura del cercle.

Procle deia:

> "A partir d'aquest problema, crec que els antics buscaren la quadratura del cercle. Perquè si es pot trobar un paral·lelogram igual a una figura rectilínia qualsevol, serà digne de recerca si es pogués demostrar que la figura curvilínia sigui igual a una circular."

Definició del problema: quadrar un cercle consisteix en trobar, amb regle i compàs, un quadrat d'àrea equivalent al cercle.

10.2. Les primeres referències del problema

1800 anys a.C els egipcis resolien el problema de manera aproximada agafant un quadrat de costat 8/9 del diàmetre del cercle. Aquest antecedent del problema proporcionava un valor bastant acceptable de $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2$

Les referències més properes a l'època grega les trobem a Plutarc *De exili,* 17. En aquest lloc s'atribueix a Anaxàgores de Clazomene (499 - 427 aC.) haver quadrat el cercle:

> "Cap lloc pot treure la felicitat a l'home, ni la virtut, ni la saviesa. Ja que encara a la mateixa presó, Anaxàgores va trobar la quadratura del cercle".

També ho recull Vitruvi a la seva famosa obra *De arquitectura* VII, 11 on diu:

> "Trobant-se pres va escriure Anaxàgores sobre la quadratura del cercle. Sembla que també va escriure un llibre de perspectiva."

El problema de la quadratura va ser molt popular en el seu temps no només entre els matemàtics sinó entre qualsevol ciutadà. Una prova ens la dona Aristòfanes en la seva obra *Aus* en la qual posa en boca d'un personatge l'ús del problema. Aristòfanes fa intervenir a Metó i a un deixeble seu, Peisthietairos, en la resolució del problema (GARCÍA BACCA, 1968: 43.

> "METÓ: Ajusto, doncs, per sobre aquest regle corb i aplico el compàs: entens?
> PEISTHIETAIROS: No ho entenc.
> METÓ: Doncs aplicaré un regle recte, a veure si el cercle et resulta quadrat".

En aquest fragment es veu que hi ha una certa ironia posada per Aristòfanes en boca de Metó, l'astrònom descobridor del cicle de 19 anys que feia coincidir el calendari lunar i el solar. No obstant, no hi ha constància que Metó es plantegés la quadratura sinó únicament, en opinió de Heath, dividir el cercle en quatre quadrants mitjançant dos diàmetres.

El problema de la quadratura del cercle no és un problema que pugui resoldre's amb regle i compàs. Els grecs ho van saber ben aviat i per això no van restringir les seves solucions a aquestes eines euclidianes i van inventar noves corbes i nous estris per donar-hi solució.

Procle atribueix a Oenopides la primacia de ser el primer matemàtics que va intentar de buscar una solució plana, es a dir amb regle i compàs, per a solucionar la quadratura del cercle. També li atribueix, però, la demostració de dos teoremes:

1) Dibuixar la perpendicular a una recta per un punt exterior a ella.
2) Construir per un punt donat sobre una recta també donada una altra recta que formi amb la primera un angle determinat.

Sense que hi hagi més constància tant d'uns cosa com de l'altra que la referència de Procle.

Heath, en canvi, considerava que els resultats elementals obtinguts per Oenopides eren una prova que havia estat pioner en el plantejament del problema amb només el regle i el compàs però de res més. Seria, doncs, segons ell, el primer en establir la restricció a utilitzar únicament les eines euclidianes per a qualsevol construcció plana. Més tard, aquesta practica va esdevenir un cànon a seguir per la resta de matemàtics grecs.

No obstant no hi constància de cap intent de resolució de la quadratura, ni tant sols erroni, realitzat per Oenopides. És remarcable que, contràriament al que va passar en els segles posterior, no es conserva d'època grega cap demostració errònia de la quadratura del cercle utilitzant només el regle i el compàs. En els segles posteriors, en canvi, matemàtics i aficionats tractaren, sense èxit, de quadrar el cercle amb l'ús exclusiu de les eines euclidianes (EVES, 1983) (HEATH,1981).

10.3. Els primers intents: Antifont i Brisó

Antifont era un sofista contemporani d'Hipòcrates. Durant el segle V aC. Atenes gaudia d'una període democràtic en el qual les lluites per obtenir el poder propiciaven el desenvolupament de les habilitats dialèctiques. En aquest context va aparèixer l'escola sofista. El qui hi pertanyien feien passar com a veritat el que era fals utilitzant arguments capciosos i prometent resultats pràctics.

Antifont va inscriure un polígon en un cercle i va doblar el nombre de costats. Va pensar que repetint aquesta operació un nombre de vegades, però finit, arribaria a fer coincidir el polígon amb el cercle. Aleshores l'hauria quadrat, ja que l'àrea del cercle seria igual a la del polígon i aquest si que es pot quadrar (REY, 1961: 160).

Temisti a la *Física* deia que Antifont havia començat inscrivint un triangle equilàter:

> "(...) respecte a Antifont no res hauria de dir el geòmetra, perquè, inscrivint un triangle equilater en el cercle i sobre cada un dels costats del triangle inscrit un triangle isòsceles amb vèrtex en la circumferència del cercle i fent el mateix continuadament creia que un cop o un altre coincidiria el costat del triangle final, malgrat ser una línia recta, amb la perifèria."

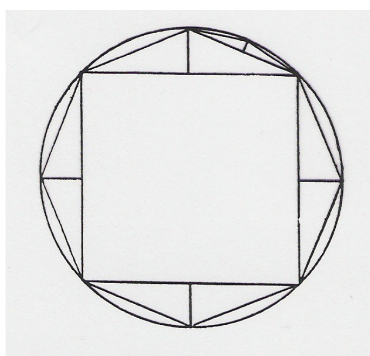
Simplici en el *Comentari a Aristòtil* sostenia, en canvi, que Antifont havia començat inscrivint un quadrat:

> "Antifont va descriure un cercle i va inscriure en ell una de les superfícies poligonals que poden ser inscrites, per cas el quadrat del polígon inscrit."

i recollia una hàbil critica a l'argumentació del sofista:

> "Millor fora dir, com a principi, que és impossible que coincideixin una recta amb un cercle. Més aviat una recta exterior toca el cercle en un sol punt i una interior únicament en dos i no en més (...)
>
> Que, per cert, dividint sense parar el plànol intermedi entre la recta i la perifèria del cercle no l'exhaurirà ni trobarà la perifèria del cercle ja que el plànol és indefinidament divisible."

És molt probable que Eudox es basés en aquest intent quan es va plantejar l'enunciat del mètode d'exhaustió.



Aristòtil a la *Física* descrivia l'intent d'Antifont amb els termes següents:

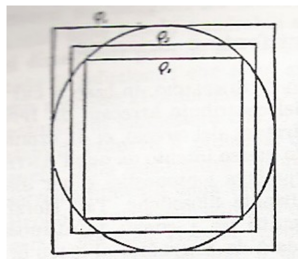
> "Antifont pensava que en aquesta línia l'àrea (del cercle) podia consumir-se i al cap d'un cert temps s'obtindria que el polígon inscrit en el cercle tindria els costats, degut a la seva petitesa, coincidents amb la circumferència, i així, es podria fer un quadrat igual a un cercle ja que ho podria ser igual a un polígon."

Resulta evident que aquest primer intent ben aviat va resultar manifestament erroni. Per això, uns anys més tard, Brisó, un socràtic contemporani de Plató i deixeble de Sòcrates, va tractar de donar-ne una solució. L'escola socràtica pretenia descobrir la veritat sometent a l'altre a preguntes a partir de les quals era conduït cap a la resposta del problema plantejat.

Brisó va inscriure i circumscriure a un mateix cercle respectivament dos quadrats. Després va construir un quadrat intermedi als altres dos. La seva argumentació era la següent:

El quadrat intermedi és menor que l'exterior i major que l'interior.
El cercle, també, és menor que el quadrat exterior i major que l'interior.
Coses que son grans i petites de la mateixa cosa són iguals entre si.

Aquest sil·logisme feia coincidir l'àrea del cercle amb l'àrea del quadrat intermedi.



Tot i la pulcritud del sil·logisme. Ben aviat fou superat. Alexandre d'Afrodísies a la seva obra *Refutacions de sofismes* sostenia:

> "Però la quadratura del cercle per Brisó és erràtica i sofistica, perquè no procedeix segons els principis propis de la geometria sinó segons altres de més generals. Que en circumscriure al cercle un quadrat i inscriure un altre dins i entre els dos quadrats un altre més i dir després que el cercle és el que es troba entre els dos quadrats, i d'igual manera dir que el quadrat intermedi entre els dos quadrats abans citats és menor que el quadrat circumscrit i major que l'inscrit i que les (coses) que són a la vegada majors i menors que les altres son iguals entre si —per tant són iguals el cercle i el quadrat— procedeix de certs principis falsos."

Tot seguit, Alexandre d'Afrodísies va esgrimir el seu argument més clau contra l'argumentació de Brisó:

> "perquè vuit i nou son majors i menors que deu i set i malgrat això no son iguals."

10.4 La quadratriu d'Hípies

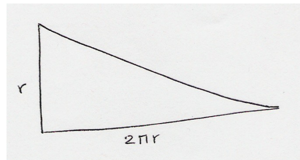
Hípies d'Elis (aprox. 425 aC.), segons explica Pappos va inventar la quadratriu, però només la va utilitzar per trisecar. Fou Dinostrat (aprox. 350 aC.) germà de Menecmo i deixeble d'Èudox qui per primer cop va fer servir aquesta corba mecànica per a quadrar. Pappos es basa en Sporus del segle III dC qui amb seguint a Dinostrat hauria intentat fer servir la quadratriu per les mateixes finalitats. Procle, per la seva banda, atribueix a Gemino haver estudiat les propietats de la quadratriu abans fins i tot que Hípies.

En la proposició 26 de la *Col·lecció Matemàtica,* Pappos desenvolupa l'aplicació de la quadratriu per quadrar. El seu plantejament es basa en un teorema enunciat per Arquímedes en *La mesura del cercle*. En ell, el siracusà redueix el problema de quadrar el cercle a un problema de rectificar. Es a dir a construir, amb regle i compàs, un segment que tingui la mateixa longitud que la circumferència.

> "Tot cercle, és equivalent a un triangle rectangle en el qual un dels costats de l'angle recte és igual al

radi del cercle i la base (és a dir l’altre costat de l’angle recte) igual al perímetre del cercle.”

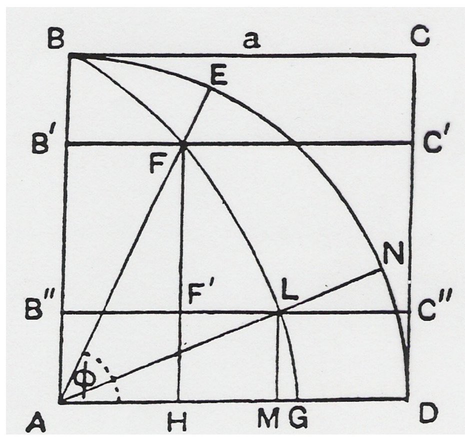
Llavors, segons aquest teorema, l’àrea del cercle és igual a l’àrea d’un triangle rectangle on un catet és el radi i l’altre, la longitud de la circumferència.



Aleshores, el problema de quadrar un cercle es redueix a utilitzar la quadratriu per trobar la longitud de la circumferència. Per tant, fer servir la quadratriu per rectificar.

Abans d’estudiar amb detall el desenvolupament de Pappos fora bo recordar la propietat de la quadratriu

$$\frac{B\hat{A}D}{E\hat{A}D} = \frac{B\widehat{E}D}{E\widehat{D}} = \frac{\overline{A}\,\overline{B}}{FH}$$



La proposició 26 planteja provar que el segment AB és mitjana proporcional entre l’arc BED i els segment AG.

$$\frac{B\widehat{E}D}{AB} = \frac{AB}{AG}$$

Aleshores l’arc BED, que és un quart de cercle, serà igual a una proporció de segments i per tant un altre segment.

La demostració la fa per una doble reducció a l’absurd, és a dir suposar que:

$$\frac{B\widehat{E}D}{AB} > \frac{AB}{AG} \quad \text{o} \quad \frac{B\widehat{E}D}{AB} < \frac{AB}{AG}$$

condueix a situacions absurdes.

Primer suposa que $\frac{B\widehat{E}D}{AB} < \frac{AB}{AG}$ aleshores hi haurà un cert AK>AG que si que complirà la igualtat $\frac{B\widehat{E}D}{AB} = \frac{AB}{AK}$ (1). Suposarem que AK és el del dibuix i amb radi aquest segment determinaren sobre la quadratriu el punt intersecció F i sobre AB el punt L. Si unim A amb F i perllonguen, aquest segment tallarà l'arc BD en E.

Com que BED i LFK són arcs de cercle es complirà:

$$\frac{B\widehat{E}D}{AB} = \frac{L\widehat{F}K}{AK} \Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{B\widehat{E}D}{L\widehat{F}K} \quad (2)$$

Amb (1) i (2) tenim que:

$$\frac{B\widehat{E}D}{AB} = \frac{AB}{AK} = \frac{B\widehat{E}D}{L\widehat{F}K}$$

Com que els numeradors són iguals, els denominadors també ho són i en conseqüència:

AB = arc LFK

Ara bé, per la propietat de la quadratriu

$$\frac{AB}{FH} = \frac{B\widehat{E}D}{E\widehat{D}} = \frac{L\widehat{F}K}{F\widehat{K}}$$

Com que AB = l'arc LFK aleshores el segment FH= arc FK. Però això és absurd ja que l'arc sempre és més gran que la corda. També obtindríem un absurd si consideréssim l'altra desigualtat $\frac{B\widehat{E}D}{AB} > \frac{AB}{AG}$. En conseqüència:

$$\frac{B\widehat{E}D}{AB} = \frac{AB}{AG}$$

10.5 Objeccions de Sporus a la quadratriu

Pappos, després d'exposar i demostrar la proposició 26, explica quines van ser les objeccions que va fer Sporus de Nicea a la utilització de la quadratriu per a rectificar. D'aquest autor grec se'n saben poques coses. El primer lloc on apareix citat és al segle VI dC en una obra de Leontius titulada *Sobre l'esfera d'Aratus.* Paul Tannery[1] a finals del segle XIX va defensar que Sporus hauria escrit un text al voltant del segle III dC en el qual estudiava la quadratura del cercle i la duplicació del cub i que duia per títol *L'abellar aristotèlic*.

La primera objecció la resumeix el següent text:

> "En efecte, si dos punts comencen a moure's a partir del punt B, com podran aturar-se al mateix temps, un en el punt A seguint la recta i l'altre en el punt D seguint l'arc, sense conèixer abans la raó de la recta AB a l'arc BED"

Aquí, Sporus planteja que perquè els dos punts coincideixin en el mateix instant cal conèixer la raó de la circumferència al radi és a dir $2\pi r/r = 2\pi$.

I segueix amb l'argumentació defensant la necessitat de conèixer aquesta proporció per poder establir les velocitats:

> "Ja que es requereix que necessàriament les velocitats dels moviments estiguin en la mateixa

[1]TANNERY, Paul. Sur Sporus de Nicée. *Archives de la Faculté de Lettres de Bordeaux,* núm 3, 1882, v. IV, 178-184.

proporció. Però si s'utilitzen les velocitats no prefixades, com pot ser que aquests punts s'estabilitzin així simultàniament, al menys que això arribi per casualitat?"

La segona objecció la descriu a continuació, i en ella és mes taxatiu, creu que no es podrà obtenir mai el punt de tall G que s'utilitza en la demostració.

"A més, l'extremitat de la línia de la qual alguns se serveixen per a la quadratura del cercle, és a dir, el punt on la línia talla la recta AD no és conegut. Representem-nos les coses que hem dit en la delineació proposada: quan les rectes BC i BA posades en moviment s'aturin simultàniament coincidiran amb la recta AD i no faran cap secció entre elles, ja que la secció cessa abans de la coincidència en AD; secció que resultarà ser l'extremitat de la línia on aquesta retrobarà la recta AD"

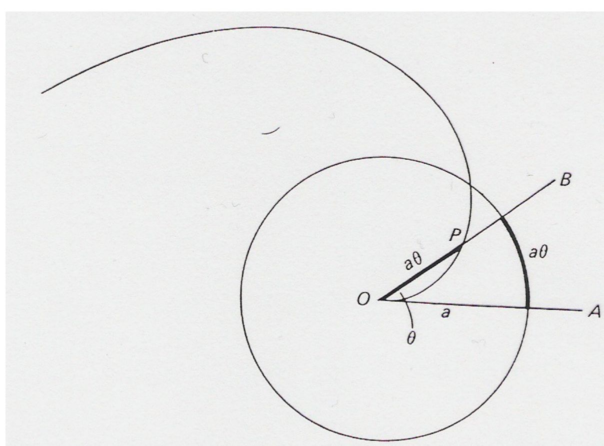
Considera, doncs, que el punt G no es trobarà sobre AD i que només es podrà concebre en AD si el perllonguem a partir del darrer punt d'igual manera com es perllonga una recta. Aquesta segona objecció és molt encertada i per això Heath considera que el punt G només es pot trobar d'altre manera que aplicant el mètode d'exhaustió a la manera grega, perquè la seva obtenció comporta un procés de las al límit.

Bisequem l'angle i obtenim F. Després tracem l'arc AF i la perpendicular a AD. Així obtenim els punts H i K. Després repetim el procés amb l'angle ACD i obtenim un altre parell de punts H' i K'. La repetició successiva d'aquest procediment permet obtenir una successió de punts H i de punts K que convergeixen a un punt G que estarà entre mig.

10.6 L'espiral d'Arquimedes

L'espiral és una corba que es pot definir en termes dinàmics. Només cal moure un punt P amb moviment uniforme al llarg d'una recta OB mentre que aquesta recta gira , també uniformement respecte al seu origen O.

En coordenades polars tenim que, en tot moment el segment recorregut OP és proporcional a l'angle AOB. Per això l'equació de l'espiral en coordenades polars és r = aθ . On r = OP, a és una constant i $\theta = A\hat{O}B$.



La raó perquè Arquimedes va utilitzar l'espiral no està clara però qualsevol de les tres argumentacions següents pot ser-ne vàlida: 1)Per poder calcular π i quadrar el cercle. 2) Per motius relacionats amb l'astronomia, com, per exemple, l'estudi del moviment dels planetes. 3)

Per interessos mecànics ja que la corba és combinació de dos moviments regulars i uniformes.

Per utilitzar l'espiral per quadrar només cal dibuixar un cercle de centre O i radi i en ell, a partir de O traçar aquesta corba gràcies a la qual tot punt P d'ella complirà que PO serà igual a l'arc comprés entre OA o OP i valdrà aθ . Si consideren OP perpendicular a OA, aleshores OP serà igual a la longitud d'un quart de cercle. Aleshores haurem obtingut una longitud que multiplicada per 4 serà la mateixa que la de la circumferència.

L'àrea del cercle, aplicant la proposició d'Arquímedes, serà la del triangle de catets r i 2π r. que en aquest cas valdrà:

$$K = \frac{a}{2}(4 \cdot OP) = 2a \cdot OP$$

Aleshores el costat del quadrat buscat està en mitjana proporcional entre 2a i OP.

$$si \quad K = m^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2a \cdot OP \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2a} = \frac{OP}{m}$$

La construcció que Arquimedes a *Les espirals* li serveix per obtenir la longitud de la circumferència. Consisteix en representar una espiral i senyalar el punt P on aquesta corba ha completat una volta completa. Després es dibuixa la tangent per aquest punt. Aquesta recta talla l'eix vertical en el punt T. Arquimedes prova en la proposició 19 d'aquest llibre que OT és la longitud de la circumferència de un cercle de radi OP.

No fa cap intent explícit de quadrar però no és estrany ja que en *La mesura del cercle* ja havia reduït el problema de quadrar a un problema de rectificar, és a dir de trobar la longitud de la circumferència.

10.7 Sobre les solucions d'Apol·loni i de Carpus

Iàmblic considerava que Apol·loni quadrava el cercle amb una corba anomenada "germana de la concoide", però no se sap ni quina era aquesta corba, ni per tant, com l'aplicava per quadrar. Tanmateix en un altre passatge diu que era la corba de Nicomedes i per això es pensa que podria ser la quadratriu. També es podria pensar que era una espècie de hèlix[2] i que quadrava per un procediment similar a l'espiral d'Arquímedes.

Si se sap poc de la corba que Apol·loni utilitzava per quadrar menys se sap encara de la que feia servir Carpus. Aquest autor grec sostenia que es tractava d'una corba de doble moviment. Tannery va pensar que era la cicloide[3], però no hi ha evidència que aquesta afirmació sigui certa.

[2] L'hèlix és una corba tal que la seva tangent forma un angle constant amb una línia recta fixa anomenada eix. L'hèlix circular s'obté combinant un moviment circular uniforme entorn a un eix amb un moviment paral·lel a l'eix.

[3] La cicloide és una corba engendrada per un punt fix situat sobre una circumferència que roda sense lliscar damunt d'una recta. Les seves equacions son:

$$x = a(\theta - sin\theta)$$
$$y = a(1 - \cos\theta)$$

11. LA DUPLICACIÓ DEL CUB

11.1. L'origen del problema

Hi ha dues historietes que descriuen l'aparició d'aquest problema: la faula del rei Minos i la llegenda de Delos. Erípides explica, en una de les tragèdies perdudes titulada *Polieidos,* que el rei Minos va fer duplicar la tomba del seu fill Glauc. Es tractava d'una tomba cúbica i l'autor de la tragèdia fa cometre l'error al propi rei en proposar com a solució que es doblés el costat.

La segona historieta està situada el 428 aC, any de la pesta d'Atenes. S'explica que fou enviada una delegació a l'oracle d'Apol·lo a Delos per interrogar-lo sobre la manera de fer allunyar la pesta i aquest va replicar que calia doblar l'altar cúbic. Sembla que els ateneses varen doblar el costat però aleshores el cub resultant va ser vuit vegades l'inicial.

Hi ha dos textos on aquest problema és citat. El primer correspon a Teó d'Esmirna:

> "Eratóstenes, en un libro suyo titulado «Platónico», cuenta haber Dios anunciado por un oráculo a los Delios que, para librarse de la peste, le hicieran un altar doble que el existente, que los arquitectos cayeron en gran desconcierto al investigar cómo hacer un sólido doble que otro sólido, y que acudieron, por fin, a consultar a Platón sobre este punto. El cual, cuenta, les dijo: que en su oráculo no pedía el Dios a los Delios precisamente un altar doble, más bien reprochaba manifiestamente a los griegos su descuido por las matemáticas y su menosprecio por la geometría."

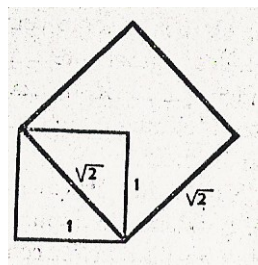
El segon text apareix en el *Comentari a l'obra L'esfera i el cilindre d'Arquimedes* escrit per Eutoci. Es tracta d'una carta presumptament enviada pel rei Ptolemeu III Evergetes el 245 aC per tal de persuadir a Eratóstenes d'anar a Alexandria per ser tutor del seu fill*:*

> "Al rey Ptolomeo,
>
> Eratóstenes. ¡Salud!
>
> Se refiere de uno de los trágicos antiguos haber representado a Minos preparando sepulcro para Glauco; e interrogado sobre por qué lo hacía de cien pies en todas direcciones, haber respondido de la siguiente manera: Pequeño es, por cierto, este sepulcro para tumba regia. Hazlo doble. Que no decaerá en belleza si duplicas ahora cada uno de los lados de la tumba.
>
> Más le pareció haber errado; porque, si se duplican los lados, el plano se hace doble y el sólido óctuplo.
>
> Se dieron, pues, a investigar los geómetras el modo de duplicar un sólido dado, conservando la misma figura, y se llamó a este problema duplicación del cubo, porque en el cubo investigaron el problema de la duplicación.
>
> Y desorientados todos por largo tiempo, al fin Hipócrates de Chío pensó que si se pudieran hallarse dos líneas rectas, de las cuales la mayor fuese el doble que la otra y dos medias proporcionales en proporción continua, el cubo podría ser duplicado con lo cual de una dificultad se cayó en otra y no menor.
>
> Se cuenta que poniéndose los Delios, algún tiempo después a duplicar uno de los altares según lo indicado en el oráculo, cayeron en la misma dificultad, y acudieron a los geómetras de la academia platónica para que se dignasen encontrarles lo que buscaban.
>
> Y, dándose con gran ahínco a tal investigación por el método de hallar dos rectas entre dos medias proporcionales, se cuenta que Arquites el de Tarento encontró la solución por medio del semicilindro y Eudoxo por el método llamado de las líneas curvas; y se halló que todos habían llegado a la solución por medios apodícticos, pero que no podían utilizar ni aplicar a la práctica, a no ser el procedimiento de Menachmo, y aun no gran cosa y siempre con dificultad.
>
> Me acudió, pues, echar mano de un dispositivo mecánico fácilmente manejable, por medio del cual se pudiera hallar, respecto de dos magnitudes dadas, no sólo dos medias sino cuantas se pidan" (GARCÍA BACCA: 1968: 46)

Siguin o no certes aquestes històries, el fet és que alguns membres de l'Acadèmia Platònica va estudiar el problema de la duplicació i van proposar solucions.

Francisco Vera, conegut historiador de la matemàtica espanyola, creia que l'origen del problema de la duplicació del cub es trobava en l'interès dels geòmetres per transportar a l'espai el problema del pla consistent en duplicar l'àrea d'un quadrat emprant la diagonal. Això els portaria a calcular l'aresta d'un cub de volum doble.

> "Es probable que el problema de duplicar el cubo también llamado problema de Delos, no fuera inspirado por la megalomanía de Minos ni por el oráculo de la Sibila, sino por los propios geómetras puesto que sabiendo desde los tiempos de Pitágoras que el cuadrado construido sobre la diagonal de otro tiene doble área que éste, es decir: sabiendo duplicar el cuadrado mediante la construcción gráfica de la raíz cuadrada de 2 y guiados por el espíritu de generalización, parece natural que quisieran transportar al espacio el mismo problema, lo que les llevo a extraer la raíz cúbica de 2 y ante la imposibilidad de construir con regla y compás la arista de un cubo de doble volumen que otro, redujeron el problema a otro." (VERA, 1978: 48)



A part d'aquests arguments, Knorr considera que és possible que l'origen del problema es trobi en les recerques que en el segle V a C va fer Hipòcrates de Quios sobre les mitjanes proporcionals. També pot haver influït la necessitat de la tecnologia militar de duplicar les catapultes.

Definició del problema: Donat el costat d'un cub, construir, servint-se només de regle i compàs, el costat d'un segon cub el volum del qual sigui doble del primer.

11.2 Hipòcrates i les dues mitjanes proporcionals

Eutoci va atribuir a Hipòcrates haver donat una primera via de solució del problema:

> "pensó que si pudieran hallarse dos líneas rectas, de las cuales la mayor fuese el doble que la otra y dos medias proporcionales en proporción continua, el cubo podría ser duplicado con lo cual de una dificultad se cayó en otra y no menor."

Trobar dues mitjanes proporcionals contínues entre dos segments *a* i *b* és trobar dos valors *x* i *y* que compleixin que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Si $b = 2a$, llavors

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

és a dir

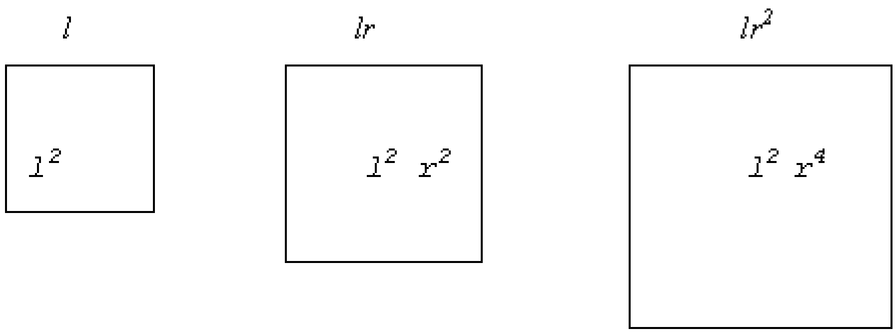
$$x^2= a\cdot y$$
$$y^2=2\cdot a\cdot x$$

i en conseqüència

$$x^3=2a^3$$

Construir *x* és construir l'aresta d'un cub de volum doble que el cub d'aresta a.

La solució d'Hipòcrates pot ser interpretada de manera geomètrica. Així, si els costats de dos quadrats estan en progressió geomètrica de raó r, les seves àrees estan en progressió geomètrica de raó r^2.



Aleshores es compleix que

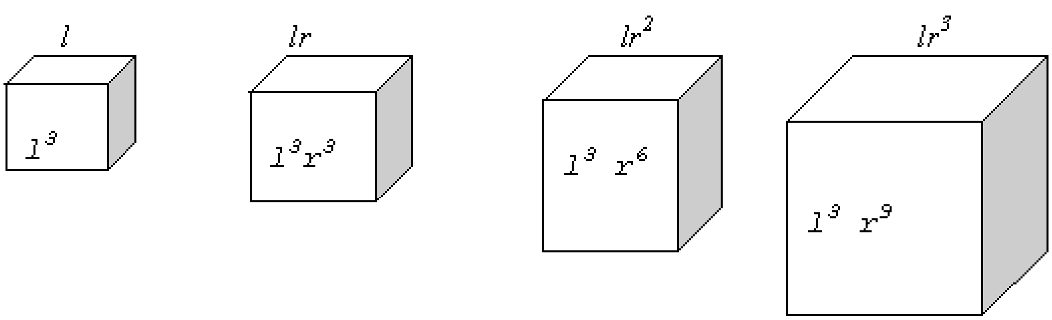
$$\frac{l}{lr}=\frac{lr}{lr^2} \qquad i \qquad \frac{l^2}{l^2r^2}=\frac{l^2r^2}{l^2r^4}$$

si fem que el costat l sigui a i el costat lr^2 sigui 2a aleshores el costat lr s'obtindrà amb aquesta proporció

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{2a} \qquad x^2 = 2a^2$$

Obtenim un quadrat de costat x que té àrea doble que un altre quadrat de costat a.

Extrapolant aquest problema als cubs, resulta que si els costats d'uns cubs estan en progressió geomètrica de raó r, la progressió dels seus volums és geomètrica de raó r^3.



$$\frac{l}{lr}=\frac{lr}{lr^2}=\frac{lr^2}{lr^3} \qquad i\ tambe \quad \frac{l^3}{l^3r^3}=\frac{l^3r^3}{l^3r^6}=\frac{l^3r^6}{l^3r^9}$$

Si fem que l=a i que $lr^3=2a$ aleshores el primer cub tindrà volum a^3 i l'últim $8a^3$. El segon i el tercer compliran que

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

és a dir

$$x^2=ay$$
$$y^2=2ax$$

i en conseqüència

$$x^3=2a^3$$

Per tant la distància *x* és la que dóna l'aresta d'un cub de volum doble d'un altre. Amb aquest procediment, el problema de la duplicació del cub es reduïa a inserir dues mitjanes proporcionals entre *a* i *2a.* (EVES, 1983) (BOYER,1986).

11.3 Arquites de Tàrent

Arquites va viure aproximadament al voltant de 400 aC. Fou un polític que va governar la ciutat de Tàrent amb poder autocràtic, però —diuen que— amb justícia i moderació, durant 7 anys consecutius malgrat que la llei limitava a 12 mesos la duració del mandat. El seu ideari consistia a defensar la raó com l'única força capaç de realitzar millores socials. El seu càrrec era Cap civil i militar de Tàrent i cap suprem de la confederació de ciutats hel·lèniques (de la Magna Grècia). Horaci va enaltir el seu valor en una *Oda* (I,28).

Arquites també va fer algunes invencions que permeten incloure'l entre els inventors o enginyers. Se li atribueix haver construït un cascavell conegut com el picarol d'Arquites i d'haver fabricat un autòmat: un colom mecànic de fusta. També va destacar en el camp musical ja que va escriure sobre les aplicacions a la música de les mitjanes aritmètiques, geomètriques i harmòniques. Precisament se li atribueix el nom d'aquesta darrera.

Arquites va intervenir directament en l'elaboració del currículum escolar que va ser vigent durant els segles posterior. Ho va fer de dues manera. Primer, va considerar que la música era necessària per l'educació del nen i en conseqüència va fer introduir-la a l'ensenyament. I segon, va introduir les matemàtiques com a matèria de formació de l'escolar. La seva preocupació per l'educació va fer que designés les quatre branques que més tard, a l'Edat Mitjana, formarien el quadrívium: l'aritmètica, com els nombres immòbils, la geometria, les magnituds estàtiques, la música, els nombres en moviment, l'astronomia, magnituds en moviment. El quadrívium i trívium (gramàtica, retòrica i dialèctica) van constituir les set matèries de la formació escolar medieval.

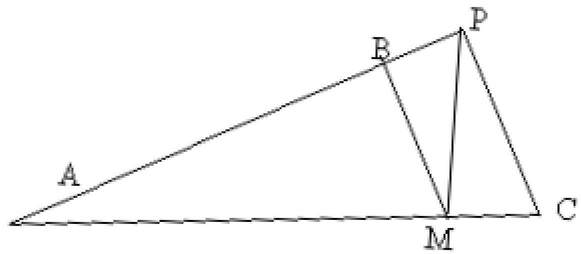
Arquites va conèixer a Plató. Aquest filòsof grec va fer el seu primer viatge a la Magna Grècia després de la mort de Sòcrates. Però durant la seva estada a la península itàlica es va enemistar amb el tirà Dionisi i aquest va ordenar empresonar-lo i condemnar-lo a mort. Arquites va intervenir i va aconseguir de salvar-li la vida i deixar-lo en llibertat. Així va començar l'amistat entre aquest matemàtic i Plató. La coneixença d'Arquites va servir d'inspiració al filòsof per les seves idees socials i polítiques.

Com a matemàtic, Arquites fou l'*ultimus pythagoreorum*. Com a tal conservava el culte als nombres i considerava que l'aritmètica estava per sobre de la geometria. Tanmateix, va proporcionar una enginyosa solució geomètrica del problema de la duplicació del cub consistent en construir geomètricament les dues mitjanes proporcionals (REY, 1961: 177) (LORIA 1987: 32)

11.4 La solució d'Arquites

La solució elaborada per Arquites per resoldre la duplicació del cub consistia en trobar un punt d'intersecció entre un cilindre recte, un tor de diàmetre interior nul i un con circular recte. Es basa en la divisió d'un triangle rectangle en tres triangles rectangles semblants.

Sigui $A\overset{\Delta}{P}C$ un triangle rectangle. Dibuixis PM perpendicular AC i BM paral·lel a PC .



Aleshores

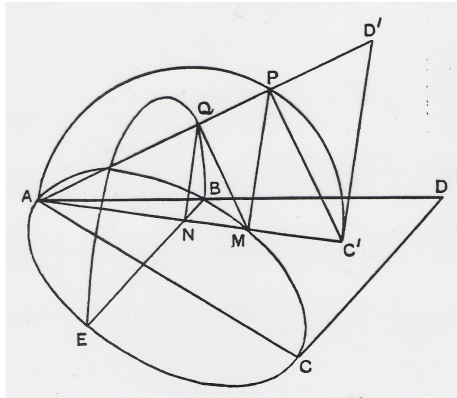
$$A\overset{\Delta}{P}C \approx A\overset{\Delta}{P}M \approx A\overset{\Delta}{B}M$$

i per tant

$$\frac{AC}{AP} = \frac{AP}{AM} = \frac{AM}{AB}$$

El problema consisteix, doncs, en ser capaços de construir el triangle $A\overset{\Delta}{P}C$ a partir de dos segments donats a i b en els quals AC=a i AB=b.

La construcció d'Arquites s'iniciava amb una circumferència de diàmetre AC=a. Sobre ella es traçava una corda AB=b. La circumferència servia de base a un cilindre recte i fent girar la corda AB al voltant d'A s'aconseguia un con. Després es traçava una altra circumferència, perpendicular a l'anterior, de diàmetre també AC. Aquesta és feia girar al voltant d'un eix perpendicular per A i permetia d'obtenir un tor de diàmetre interior nul. La intersecció de les tres figures permetia aconseguir el punt P i obtenir la solució al problema (HEATH, 1981: 207) (BARRIOS, 1991:377)



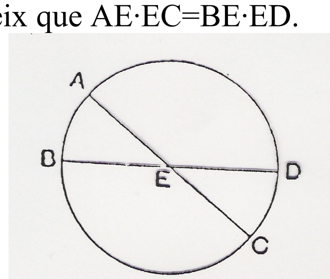
11.5 La demostració de la solució d'Arquites

Per demostrar la solució d'Arquites cal primer una proposició prèvia que apareix en el llibre III dels *Elements* d'Euclides.

Proposició 25

"Si en un cercle hi ha dues línies que es tallen, el rectangle format pels segments d'una és igual al rectangle format pels segments de l'altre"

1) Aquesta demostració resulta evident si es tallen en el centre E ja que llavors AE=EC=BE=ED i per tant es compleix que AE·EC=BE·ED.



2) Si no es tallen en el centre. Sigui F el centre i E el punt d'intersecció de les cordes AC i BD. Llavors unim F amb B, E i C. Dibuixem FG i FH perpendiculars a AC i BD. Es compleix que AG=GC i BH=HD.

La recta AC està dividida en dues parts iguals i dos parts desiguals per la proposició II, 5.

$$AE\cdot EC+EG^2=GC^2$$

si sumem als dos membres de la igualtat anterior GF^2, obtenim

$$AE\cdot EC+EG^2+GF^2=GC^2+GF^2$$

com que $FE^2=EG^2+GF^2$ i $FC^2=GC^2+GF^2$

s'obté que $AE\cdot EC+FE^2=FC^2$

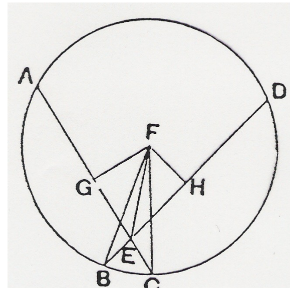
a més FC=FB per ser el radi llavors $AE\cdot EC+FE^2=FB^2$

així s'obté que $AE\cdot EC=FB^2- FE^2$

anàlogament obtindríem que $DE\cdot EB=FB^2- FE^2$

Com que els segons membres d'aquestes igualtats son iguals aleshores

$$AE\cdot EC=DE\cdot EB$$



Entrarem ara a la demostració pròpiament de la solució d'Arquites. Sigui APC' la posició del cercle que descriu el toro. AC' troba el cercle ABC en M. Dibuixem PM perpendicular a ABC i obtenim P sobre aquest cercle i que també pertany al cilindre de base ABC. AP talla en Q el semicercle BQE. AC' talla EB en N. El segment QN és perpendicular a BE. Aleshores QN^2=BN·NE i per la proposició II, 35, que abans hem exposat, es compleix que BN·NE=AN·NM. Aleshores $A\hat{Q}M$ és un angle recte ja que QN^2=AN·NM. A més també l'angle $A\hat{P}C'$ també és recte. Aleshores MQ és paral·lel a C'P i en conseqüència:

$$\frac{C'A}{AP}=\frac{AP}{AM}=\frac{AM}{AQ} \quad\Rightarrow\quad \frac{AC}{AP}=\frac{AP}{AM}=\frac{AM}{AB}$$

i per tant AP i AM estan en proporció continua amb AC i AB i AP seria l'aresta del cub de volum doble d'AB.

11.6 Arquites en versió actual

Un con d'equació $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{b^2}x^2$ (1), un cilindre d'equació $x^2+y^2=ax$ (2) i un tor d'equació $x^2+y^2+z^2=a\sqrt{x^2+y^2}$ (3). Tinguis en compte que AC=a i AB=b.

De les equacions (1) i (2) obtindrem

$$x^2+y^2+z^2=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{b^2} \quad (4)$$

De l'equació (3) obtindrem

$$\left(\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)}\right)^2=a\sqrt{x^2+y^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)}}=\frac{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)}}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (5)$$

l'expressió (4) es pot escriure:

$$\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b} \quad (6)$$

de (5) i (6) obtenim

$$\frac{a}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}=\frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b}$$

Si nomenem u=$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ i v=$\sqrt{x^2+y^2}$ aquests dos valors son les dues mitjanes proporcionals que permeten resoldre el problema (LORIA, 1987: 33).

Dues opinions a propòsit del treball enginyós d'Arquites ens la donen Abel Rey i George Allman.

Abel Rey considerava que:

> "la solució d'Arquites ens ofereix una mostra del contingut essencial de la geometria d'Euclides, continguda en els llibres V, VI i X sobre les proporcions, les semblances i les mancances d'operar irracionals." (REY, 1961: 185)

Allman creia que:

> "li era familiar a Arquites la generació dels cilindres i dels cons, i posseïa igualment idees clares sobre la interpretació de les superfícies, a més tenia una concepció correcta dels llocs geomètrics i de les seves aplicacions a la determinació d'un punt en el mig de la seva intersecció." (ALLMAN, 1889: 107)

No hi ha dubte que la solució d'Arquites és una prova que els coneixements geomètrics dels pitagòrics eren molt elevats tant pel que feia al domini de les corbes resultants de les interseccions de figures com pel nivell de desenvolupament de la concepció espacial.

11.7 La solució perduda

Eutoci recull unes referències breus a un mètode per duplicar el cub que va fer Èudox i —que diu— que es basava en línies corbes. Tannery al 1884 va suggerir una reconstrucció a aquesta solució eudoxiana. Consistia en una adaptació de la solució d'Arquites obtinguda construint la projecció de la intersecció del con i el tor sobre el pla que constituïa la base del cilindre.

Com hem vist en l'apartat anterior les equacions dels tres figures són:

con: $$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{b^2}x^2$$

cilindre: $$x^2+y^2+=ax$$

tor: $$x^2+y^2+z^2=a\sqrt{x^2+y^2}$$

La intersecció del con i del tor dóna:

$$x^2=\frac{b^2}{a}\sqrt{x^2+y^2}$$

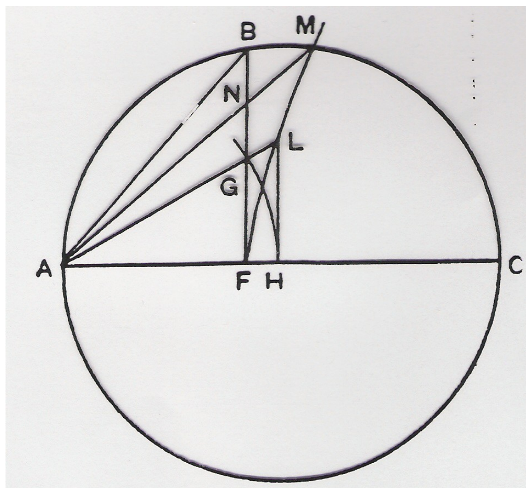
que es coordenades polars resulta ser

$$\rho^2 \cos^2 \theta = \frac{b^2}{a} \rho$$

que després de simplificat queda:

$$\rho = \frac{b^2}{a \cos^2 \theta} \quad (1)$$

Per construir alguns punts de la corba Tannery seguia els passos següents: Primer dibuixava el cercle ABC de diàmetre AC i sobre ell portava la corda AB. AB=b i AC=a. Després dibuixava BF perpendicular a AC. Agafava, a continuació, un punt G arbitrari del segment B F i unia A i G. Amb A com a centre i radi AG traçava l'arc de cercle i obtenia H. Per H aixecava la perpendicular, cosa que li permetia obtenir el punt L que era un dels punts de la corba buscada.



En la demostració d'aquests mètode cal provar que L pertany a la corba és a dir que satisfà l'equació (1).

Primer provarem que $AB^2= AF \cdot AC$ i així haurem provat que $AF=\frac{b^2}{a}$.

Partirem d'una expressió certa que $AF \cdot FC=BF^2$ pel fet de ser BF perpendicular a AC i pertànyer B al cercle. Aleshores si sumem a ambdós membres AF^2 obtindrem:

$$AF^2+AF \cdot FC=AF^2+BF^2$$

o el que és igual

$$AF(AF+FC)= AB^2 \text{ (pel Teorema de Pitàgores)}$$

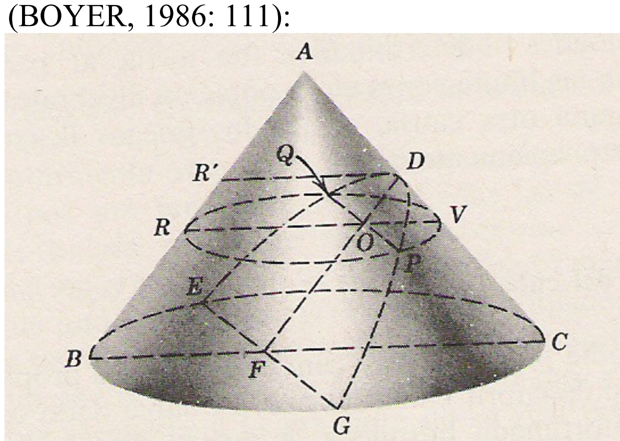
en conseqüència $AF \cdot AC=AB^2$

En segon lloc hem de tenir en compte que si l'angle $G\hat{A}F = \theta$, aleshores $AG=AF \sec\theta$ i també que $AL=AH \sec\theta =AG \sec\theta =AF \sec^2\theta$. Aleshores si $AL=\rho$ i $AF=\frac{b^2}{a}$, l'expressió $AL= AF \sec^2\theta$ es pot escriure com $\rho = \frac{b^2}{a \cos^2 \theta}$ que és la fórmula de la corba en qüestió en coordenades polars. Aquesta corba tallarà el cercle ABC en el punt M. El segment AM permetria trobar després AP tenint en compte que $AM^2=AB.AP$ (HEATH, 1981: 250).

11.8 Menecmo i el descobriment de les seccions còniques

Menecmo (aprox. 350 aC.) ha passat a la història com el primer matemàtics que va tenir la idea d'obtenir unes corbes mitjançant les seccions d'un con. No sabem si fou per aquest fet però el cert és que en la seva època va assolir molt de prestigi com a matemàtic, prova d'això és que va ser mestre d'Alexandre el Gran. S'explica l'anècdota que Alexandre li va preguntar si havia dreceres per aprendre la geometria i Menecmo li va respondre que per viatjar a través del país hi havia camins per a reis i camins per a ciutadans comuns, però, la geometria només tenia un únic camí per a tots. Val a dir que aquesta mateixa història s'explica, també, d'Euclides i el rei Ptolemeu. Aristòtil i Cal·lip citen a Menecmo a propòsit de les esferes homocèntriques d'Èudox, de les quals n'era un fidel defensor.

Menecmo va obtenir les còniques, tallant per un pla perpendicular a la generatriu d'un con. Si aquest era acutangle, la secció donava una el·lipse i s'anomenava *Oxytome.* Si el con era obtusangle, la secció resultant era una hipèrbola i rebia el nom d'*Amblytome.* I finalment, si era rectangle la secció que s'obtenia era una paràbola que era coneguda amb el nom de *Orthotome.* Aquesta manera d'obtenir les còniques resulta un poc diferent a com s'obtenen en l'actualitat, ja que ara es juga amb la inclinació del plànol de tall i no amb l'angle del con. En els seus estudis, Menecmo possiblement va arribar a obtenir l'equació $y^2=\ell\cdot x$ on ℓ és constant i depèn de la distància al vèrtex. Una suposada manera com Menecmo va poder arribar a obtenir aquesta formula pot ser la següent (BOYER, 1986: 111):



Sigui EDG la secció del con recte ABC obtinguda tallant la generatriu per un plànol perpendicular. Sobre aquesta secció agafem un punt P i per ell tracem un pla horitzontal de manera que a l'altre extrem obtenim un punt Q. Per construcció PQ serà perpendicular a RV cosa que implica que $OP^2=OR\cdot OV$ (1).

A més, els triangles AVD i BCA són semblants cosa que significa que:

$$\frac{OV}{DO}=\frac{BC}{AB} \quad (2)$$

i els triangles R'DA i ABC també ho son, per la qual cosa:

$$\frac{R'D}{AR'}=\frac{BC}{AB} \quad (3)$$

Si a OP=x i OD=y són les coordenades del pont P, és compleix per (1) que :

$$y^2 = OR \cdot OV$$

però OR=R'D. Llavors si hi substituïm (2) i (3) obtenim:

$$y^2 = R'D \cdot OV = \frac{BC}{AB} \cdot AR' \cdot \frac{BC}{AB} \cdot DO = \frac{AR' \cdot BC^2}{AB^2} \cdot x$$

Aleshores si $l = \frac{AR' \cdot BC^2}{AB^2}$ obtenim l'equació de la paràbola $y^2 = l \cdot x$. El paràmetre l fou anomenat *latus rectum*. De manera molt similar s'obtindria les respectives equacions per l'el·lipse i la hipèrbola:

$$y^2 = lx - \frac{b^2 x^2}{a^2} \quad \text{equació de l'el·lipse}$$

$$y^2 = lx + \frac{b^2 x^2}{a^2} \quad \text{equació de la hipèrbola}$$

11.9 La duplicació amb còniques

Menecmo va aplicar les còniques per a duplicar el cub. La idea no es diferent dels procediments emprats des de Hipòcrates ja que aquí també es tracta de trobar les dues mitjanes proporcionals continues entre dos segments, ja que si x i y són aquestes mitjanes que compleixen que:

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a}$$

Aleshores,

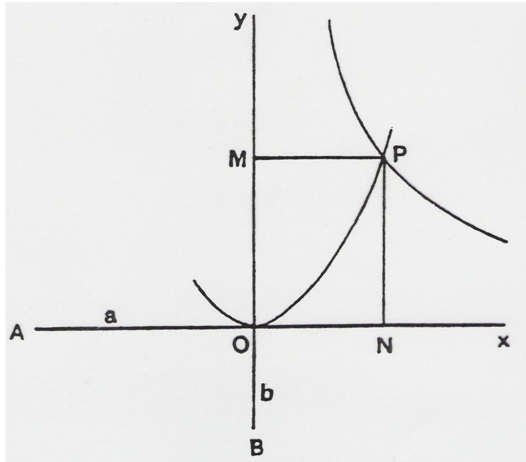
$$x^2 = by$$

$$y^2 = ax$$

$$xy = ab$$

on les dues primeres equacions representen dues paràboles referides als seus eixos i la tercera, una hipèrbola rectangular referida a les seves asímptotes. La intersecció d'un parell qualsevol d'aquestes corbes donarà la solució de la duplicació.

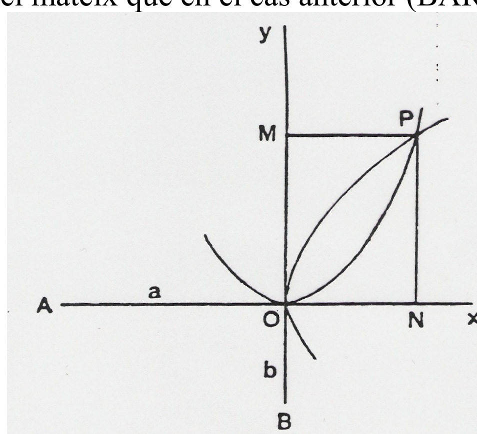
Així, la primera solució seria:



La intersecció de la paràbola i de la hipèrbola proporcionen el punt P que compleix que

$$\frac{AO}{OM} = \frac{OM}{ON} = \frac{ON}{OB}$$

La segona solució s'obtindria mitjançant la intersecció de dues paràboles que permetrien obtenir el punt P que compliria el mateix que en el cas anterior (BARRIOS, 1991: 381).

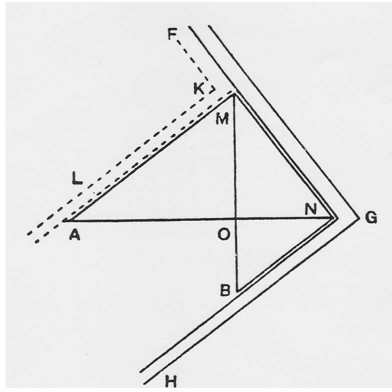


11.10. El peu de sabater

Plutarc en el *Symposiakos* (VIII, II,I) descrivia l'actitud de Plató a propòsit de l'ús d'estris mecànics per resoldre problemes geomètrics:

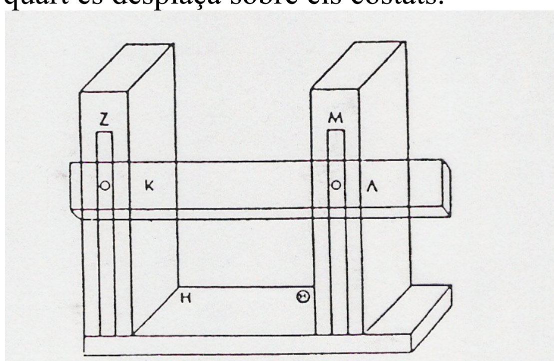
> "Platón censuraba a Eudoxio, a Arquites y a Menecmo y su escuela por haberse empeñado en resolver el problema de la duplicación del cubo por construcciones mecánicas con ayuda de instrumentos, como si no fuera posible hallar por demostraciones geométricas dos medias proporcionales. En efecto era arruinar y pervertir todo cuanto la geometría posee de excelente, reduciéndola a las cosas sensibles en vez de elevarla para que captase ideas eternas o incorporales, por cuya contemplación Dios es siempre Dios."

La solució de Menecmo posava de manifest que els quatre segments OA,OB, OM i ON podien estar disposats segons les agulles del rellotge situats radialment i separats per angles rectes.

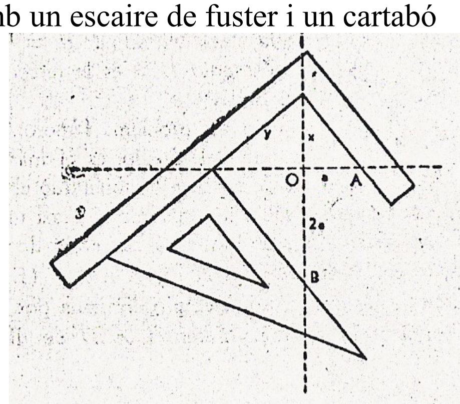


Coneixent la solució de Menecmo, algú, potser Plató, va intentar de mostrar que aquesta solució es podia obtenir també, sense el recurs a les còniques, per procediments mecànics. Amb un estri anomenat peu de sabater.

Aquesta andròmina constava de quatre bastons iguals dos a dos i disposats en forma de rectangle. Tres són fixes i el quart es desplaça sobre els costats.



També es pot improvisar amb un escaire de fuster i un cartabó



L'ús del peu de sabater per la duplicació del cub consisteix en fer lliscar el costat sobre B de manera que el vèrtex descansi en la recta OM, l'altre vèrtex sobre la recta ON i finalment, fem lliscar l'altre costat fins A de manera que ens determini el punt N i M. Si OA=2a i OB=a situats els regles de manera que passin per A i B s'obté una semblança de triangles que permet afirmar que

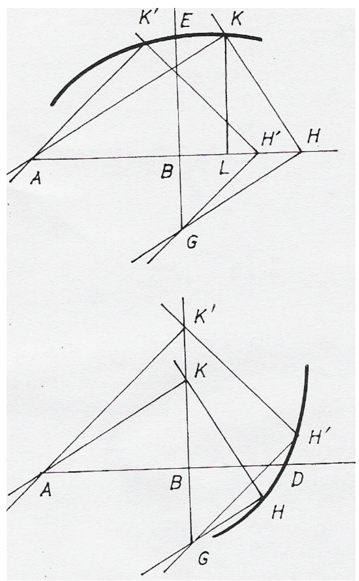
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \quad \Rightarrow \quad x^3 = 2 \cdot a^3$$

La construcció es pot fer mecànicament. Es dibuixen dues perpendiculars que es tallin en O. Després es marca OA i OB de manera que OA=2OB. Se situa l'escaire de fuster de manera que un costat passi per A. Tot seguit, sobre de l'altre costat fem lliscar un cartabó fins que passi per B. Aleshores girem l'aparell fins que M caigui sobre OA.

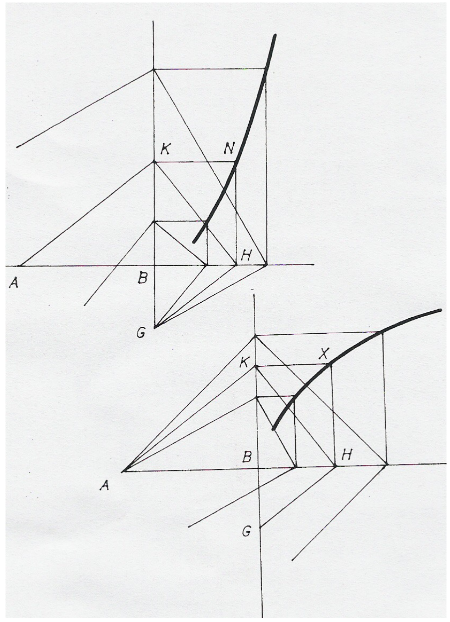
Només Eutoci va atribuir aquesta solució a Plató. Aquesta atribució resulta sorprenent ja que Plató rebutjava les solucions mecàniques perquè considerava que destruïen la bona geometria. Plutarc en canvi, no deia res d'aquesta solució no obstant considerava que Eudox, que era de l'escola platònica, havia resolt el problema d'inserir dues mitjanes proporcionals entre dos segments donats.

No obstant això, la història a atribuït tradicionalment a Plató aquest aparell amb l'argument que li agradava mostrar quan fàcil era d'arribar a la solució per procediments mecànics.

Els estudis més recents són més prudents pel que fa a l'atribució. Així, Heath creu que aquest estri va ser inventat a l'Acadèmia per algun dels contemporanis de Menecmo i Knorr defensa que el descobridor va ser el propi Èudox, el qual hauria descobert també una corba anomenada *Ofiuride* obtinguda desplaçant el peu de sabater mantenint fixos els punts de pas A i B.



Knorr va encara una mica més lluny ja que sosté que l'origen de l'aparell es remunta a Menecmo qui hauria obtingut les còniques unint punts dels triangles de les figures següents. Aquests triangles es poden obtenir mantenint fix únicament un sol punt de pas.

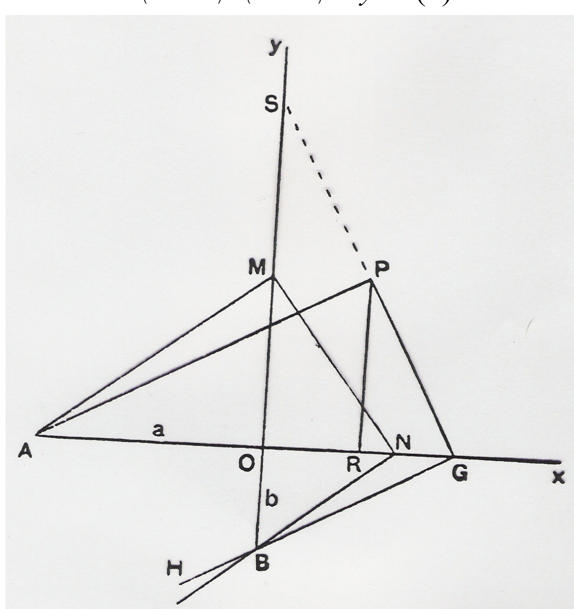


11.11. Interpretació analítica del mètode de Plató

En aquest apartat es suggereix una justificació actual del mètode del peu de sabater. Sigui OA=a i OB=b i OG = r. Disposem el peu de sabater de manera que estigui en dos posicions diferents però que totes dues passin per A i B. En una s'obté el punt P exterior a l'eix d'ordenades i en l'altre s'obté M sobre l'eix. Considerem primer P. Aquest punt compleix que $AR \cdot RG = PR^2$ (1).

Si OR=x i PR=y aleshores l'expressió anterior quedaria així

$$(a+x)\cdot(r-x) = y^2 \quad (2)$$



En la figura els triangles PRG i SOG són semblants i els hi passa el mateix a SOG i OBG.

Per tant:

$$\frac{PR}{RG} = \frac{SO}{OG} = \frac{OG}{OB}$$

i tenint en compte el que hem dit abans:

$$\frac{y}{r - x} = \frac{r}{b} \quad (3)$$

de (2) s'obté

$$ar + rx - ax - x^2 = y^2$$

$$(a + x)r = y^2 + ax + x^2$$

$$r = \frac{y^2 + ax + x^2}{a + x} \quad (4)$$

multiplicant (2) i (3)

$$(a + x) \cdot (r - x) = y^2$$

$$yb=r(r-x)$$

obtenim : $by(a+x)(r+x)=y^2r(r-x)$
simplificant resulta : $b(a+x)=yr$
si substituïm el valor de r que s'ha obtingut en (4) resulta

$$b(a + x) = y\frac{y^2 + ax + x^2}{(a + x)}$$

$$b(a + x)^2 = y(y^2 + ax + x^2)$$

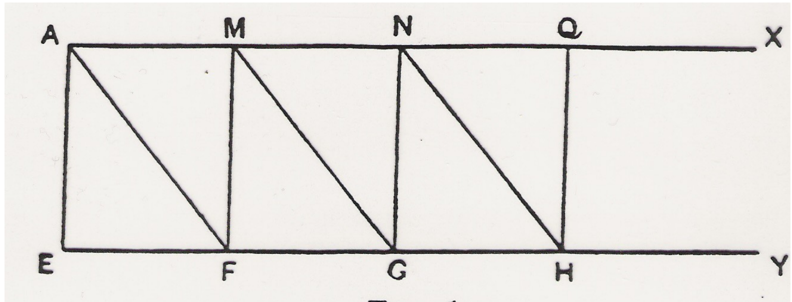
Si fem x=0 aleshores PR= OM i l'expressió anterior quedarà: $ba^2=y^3$ o el que és igual $ba^2=OM^3$.

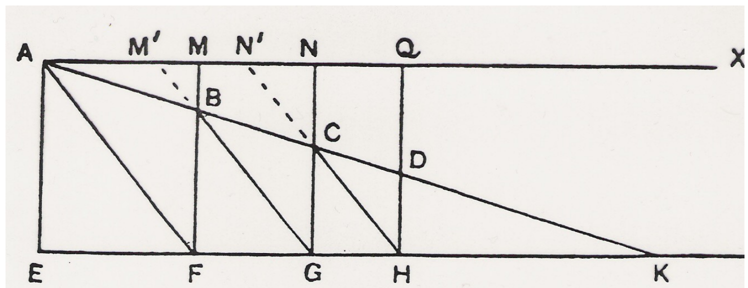
Si b=2a s'obté que $2a^3= OM^3$ cosa que implica que OM és la solució a la duplicació del cub (HEATH, 1981:257).

11.12. La solució mecànica d'Eratòstenes

Eratóstenes (276-194 aC.) era contemporani d'Arquimedes i d'Aristarc. Va néixer a Cirene però va viure molt de temps a Atenes. Ptolemeu III el va cridar a Alexandria perquè fes de mestre del seu fill i fos bibliotecari del Museu. Arquimedes li va dedicar *El Mètode.* Al fer-se gran no va poder resistir quedar-se cec i es va treure la vida.

Eratóstenes va inventar un aparell mecànic per construir les dues mitjanes proporcionals que consistia en uns triangles semblants con els de la figura.





Els triangles AEK, BFK, CGK i DHK compleixen que:

$$\frac{AE}{BF}=\frac{AK}{BK}=\frac{FK}{GK}=\frac{BF}{CG}=\frac{BK}{CK}=\frac{GK}{HK}=\frac{GC}{DH}$$

Aleshores es compleix:

$$\frac{AE}{BF}=\frac{BF}{CG}=\frac{GC}{DH}$$

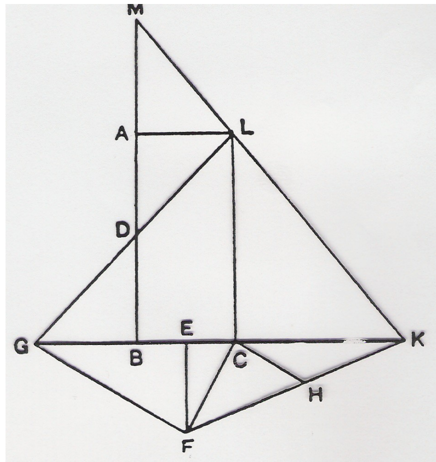
L'instrument consistia en tres rectangles iguals capaços de lliscar el segon sobre el primer i el tercer sobre el segon. Un cop desplaçats permeten obtenir la figura desitjada. Per fer això cal marcar sobre QH un punt D que estigui en el punt mig i marqui un segment meitat d'AE. Aleshores es traça la recta AE. Després es desplacen els triangles MFG i NGH fins que els punts d'intersecció de MF i NG amb AF i MG estiguin sobre la recta que uneix A amb D. Aleshores BF i CG són les dues mitjanes proporcionals que es buscava. Pappos recull aquesta construcció i la demostració en la proposició 5 del llibre III de la *Col·lecció Matemàtica.* (EVES, 1983 :78)

11.13. La concoide per duplicar

Pappos també recull el procediment que va emprar Nicomedes per duplicar el cub mitjançant la concoide. Sembla que la informació li va arribar a través d'Eutoci qui hauria copiat aquest procediment del llibre, aleshores perdut, sobre la concoide que hauria escrit el propi Nicomedes cap al 230 aC. Eutoci també comentava que aquest autor grec estava molt orgullós del seu mètode i que el considerava molt superior al que, per les mateixes dates, havia portat a terme Eratóstenes i que qualificava de impracticable i poc geomètric.

Pappos explica que Nicomedes havia reduït el problema de la duplicació del cub a un de neuseis, com els que s'aplicaven a la trisecció de l'angle.

La concoide de eix r es defineix com el lloc geomètric dels punts M alineats amb O i N de manera que MN=h quan N recorre la recta r.



La construcció de les dues mitjanes proporcionals que permetin donar solució a la duplicació és la següent: Siguin AB i BC els dos segments entre els quals volem inserir les dues mitjanes proporcionals. Dibuixem AB perpendicular a BC i completem el rectangle ABCL. Després tracem D i E, punts mitjos dels dos segments AB i BC. Unim D i L I ho perllonguem fins a obtenir G. Per E tracem la perpendicular a BC i sobre ella escollim F de manera que es compleixi que CF=AD. A continuació unim GF i per C tracem la paral·lela a GF. Per F fem passar una recta que determini un segment HK entre la paral·lela a GF per C i BC de manera que HK=AD. Aleshores HK=AD=CF. Amb aquest mètode no es fa res més que dibuixar una concoide de pol F i de directriu la paral·lela a GF per C i de distància AD. La recta que passa per K i L , talla AB en M. Els segments AM i CK són les dues mitjanes proporcionals buscades.

Un cop feta la construcció cal provar que $\frac{AB}{CK} = \frac{CK}{AM} = \frac{AM}{BC}$. És el que farem a continuació detallant la demostració que recull Pappos en el llibre III de la *Col·lecció Matemàtica.*

De la figura s'observa que:

$$\begin{aligned} BK \cdot CK &= (EK + EC)(EK - EC) = EK^2 - EC^2 \\ MA \cdot MB &= (MD + AD)(MA - AD) = MD^2 - AD^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Per la semblança dels triangles MAL i LCK tenim que:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{ML}{LK} = \frac{BC}{CK}$$

Si tenim en compte que AB=2AD i GC=2BC (aquesta darrera igualtat deguda a que DB és paral·lela mitja en el triangle GLC) obtenim:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{BC}{CK} \Rightarrow \frac{2MA}{AB} = \frac{2BC}{CK} \Rightarrow \frac{2MA}{2AD} = \frac{GC}{CK} \Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{GC}{CK}$$

Per proporcionalitat de segments determinats entre paral·leles es compleix:

$$\frac{GC}{CK} = \frac{FH}{HK} \Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{FH}{HK}$$

Però com per construcció HK=AD això implica que FH=MA i per tant que FH+HK=MA+AD i aleshores FK=MD.

Per (1) es dedueix que $MD^2=MA\cdot MB+AD^2$

A més, pel Teorema de Pitàgores:

$$FK^2 = EK^2 + EF^2 = EK^2 + CF^2 - EC^2 = EK^2 - EC^2 + CF^2 = BK \cdot CK + CF^2 = BK \cdot CK + AD^2$$

hem de considerar, però, que AD=CF per construcció. Com que MD=FK aleshores $BK\cdot CK=FK^2-AD^2=MD^2-AD^2=MA\cdot MB$ en virtut de l'expressió (2).

Llavors, considerant les semblances dels triangles MBK, LCK i MAL es compleix:

$$\frac{CK}{MA} = \frac{MB}{BK} = \frac{AB}{CK} = \frac{AM}{BC}$$

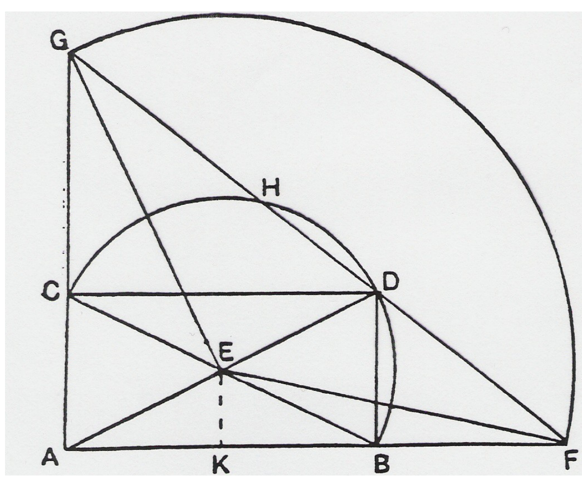
i en conseqüència

$$\frac{AB}{CK} = \frac{CK}{AM} = \frac{AM}{BC}$$

quedant, doncs, provat que CK i AM són les dues mitjanes proporcionals buscades.

10.14. Apol·loni i la duplicació del cub

Tant Apol·loni de Pèrgam (262-180 aC.) com Filó de Bizanci (250 aC.) i Heró d'Alexandria (150 dC.) van presentar la mateixa solució a la duplicació del cub, però amb petites variants. La solució consisteix en introduir dues mitjanes proporcionals entre dos segments AB i AC. Per la qual cosa primer es disposen aquests dos segments sobre rectes perpendiculars i després es completa el rectangle amb el punt D. Amb centre la intersecció de les diagonals del rectangle E i radi EB es dibuixa l'arc de cercle BDC. A continuació es traça la perpendicular per E la quan determina sobre AB el punt mig K. A partir d'aquí els passos seguits són, si més no formalment diferents:



Apol·loni dibuixava un cercle de centre E i radi —deia— apropiat de manera que els punts de tall F i G estiguessin alineats amb D. Heró construïa el mateix cercle col·locant un regle que passés per D i movent-lo convenientment permetés obtenir els punts F i G equidistants d'E. I Filó situava el regle que passés per D i el movia fins aconseguir que DF i HG fossin iguals. Les tres construccions són similars i porten a l'obtenció de GC i BF que són els segments que compleixen que:

$$\frac{AB}{GC} = \frac{GC}{BF} = \frac{BF}{AC}$$

La demostració parteix de la igualtat dels segments FE=GE per ser radis del cercle gran i aleshores prova que es compleix que AF·BF=AG·GC.

Parteix de K punt mig d'AB i, per aquesta raó es compleix que :

$$AF \cdot FB = (BK + FK)(FK - BK) = FK^2 - BK^2$$

si a aquesta igualtat li afegim KE^2 resulta:

$$AF \cdot FB + BK^2 + KE^2 = FK^2 + KE^2$$

i aplicant el Teorema de Pitàgores

$$AF \cdot FB + BE^2 = FE^2$$

anàlogament s'obtindria:

$$AG \cdot GC = EG^2 - CE^2$$

i com que BE=CE i EF=EG resulta que:

AF·BF=AG·GC

Provar aquesta igualtat té com a conseqüència que:

$$\frac{AF}{AG} = \frac{GC}{BF}$$

A més per la semblança dels triangles AGF, DGC i FBD resulta que:

$$\frac{AF}{AG} = \frac{DC}{GC} = \frac{FB}{BD}$$

i tenint en compte el que hem provat una mica més amunt:

$$\frac{DC}{GC} = \frac{GC}{BF} = \frac{FB}{BD}$$

Donat que DC=AB i BD=AC resulta:

$$\frac{AB}{GC} = \frac{GC}{BF} = \frac{BF}{AC}$$

que és allò que volíem provar.

11.15. La cissoide de Diocles

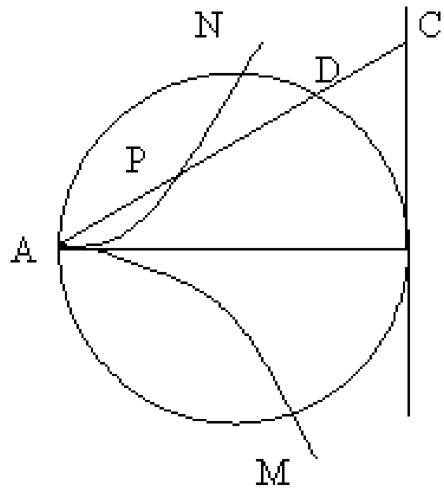
No se saben massa coses de Diocles només que Eutoci en el *Comentari a l'esfera i el cilindre d'Arquimedes* el situa com a posterior a Arquimedes i contemporani d'Apol·loni és a dir de finals del segle II aC. Es creu que una possible data de la seva mort és el 180 aC.

Eutoci explica que Diocles, a part d'estudiar la cissoide i d'aplicar-la a la duplicació del cub, va estudiar el problema d'Arquimedes consistent en tallar una esfera per un plànol de manera que els volums dels segments resultants estiguessin en una raó donada i també que fou el primer a provar les propietats focals dels miralls parabòlics.

Respecte aquest darrer tema sembla que va escriure un text *Sobre miralls cremadors* alguns fragments del qual ens han arribat a través dels textos àrabs d'Ibn Al-Haitan. Gràcies a aquest treball se sap que Zenodor va viatjar fins a Arcàdia per poder discutir amb Diocles. Aquest fet només mostra que en aquella època Diocles estava a Arcàdia, però no vol dir que aquest indret fos un centre cultural. Una característica del període Hel·lenístic és que els matemàtics no treballaven en escoles sinó de forma individual però que mantenien una viva comunicació per carta i a través de viatges.

Respecte a la cissoide, Eutoci la descriu com una corba de tercer ordre amb la qual es podria solucionar la duplicació i Procle explica que Gemine anomenava cissoide la mateixa corba que Diocles havia inventat i que havia emprat per a duplicar el cub i trobar mitjanes proporcionals.

Per construir la cissoide cal traçar primer un cercle de diàmetre AB. Per B es traça la tangent i sobre qualsevol transversal AD es porta la distància DC sobre A de manera que AP=DC. Aleshores la cissoide resulta ser el lloc geomètric dels punts P obtinguts d'aquesta manera.



Els antics només consideraven el tram de la cissoide que quedava dins del cercle és a dir AN i AM. La semblança que presenta amb una fulla d'heura fou el que va proporcionar-li el nom χισσος i d'aquí cissoide.

Una altra manera de construir-la és la següent: Sigui el cercle de diàmetre AB en el que hem traçat per B la tangent. En primer lloc tracem OL=OT i aixequem les perpendiculars a AB per aquests dos punts. Aquestes rectes determinaran sobre el cercle els punts Q i S. Tot seguit unirem AQ, recta que determinarà P sobre SL i R sobre la tangent. Després unirem AS de manera que la seva prolongació donarà P' sobre TQ. Els punts P, N i P' pertanyen a la cissoide (LORIA, 1987: 92) (SMITH, 1958: 170.

11.16. La cissoide per a duplicar el cub

En la figura anterior cal tenir en compte que si OM= r/2, BL=a el segment PL=a/2. Només cal considerar la semblança dels triangles BLP i BOM que es tradueix en que:

$$\frac{BL}{PL} = \frac{BO}{MO} \Rightarrow \frac{a}{PL} = \frac{r}{\frac{r}{2}} \Rightarrow PL = \frac{a}{2}$$

En aquestes condicions SL i AL són les dues mitjanes proporcionals. Es a dir que el que cal provar és que:

$$\frac{BL}{SL}=\frac{SL}{AL}=\frac{AL}{PL}$$

Per fer aquesta demostració es recorre a les semblances dels triangles següents:

$$A\overset{\Delta}{L}P \approx A\overset{\Delta}{T}Q \Rightarrow \frac{AL}{AT}=\frac{PL}{QT}=\frac{AP}{AQ} \Rightarrow \frac{AL}{PL}=\frac{AT}{QT}$$

$$B\overset{\Delta}{L}S \approx A\overset{\Delta}{S}L \Rightarrow \frac{BL}{SL}=\frac{SL}{AL}=\frac{BS}{AS}$$

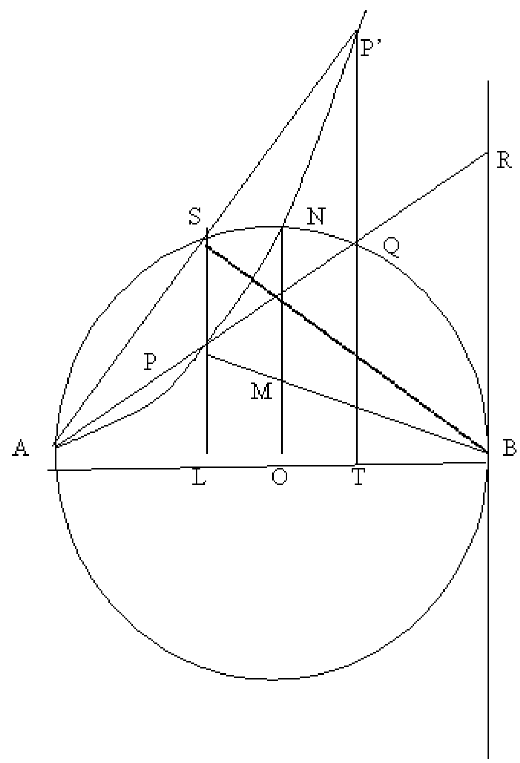
$$A\overset{\Delta}{T}Q \approx B\overset{\Delta}{L}S \Rightarrow \frac{AT}{BL}=\frac{QT}{SL}=\frac{AQ}{BS} \Rightarrow \frac{AT}{QT}=\frac{BL}{SL}$$

Aleshores com que:

$$\frac{AL}{PL}=\frac{AT}{QT}=\frac{BL}{SL}$$

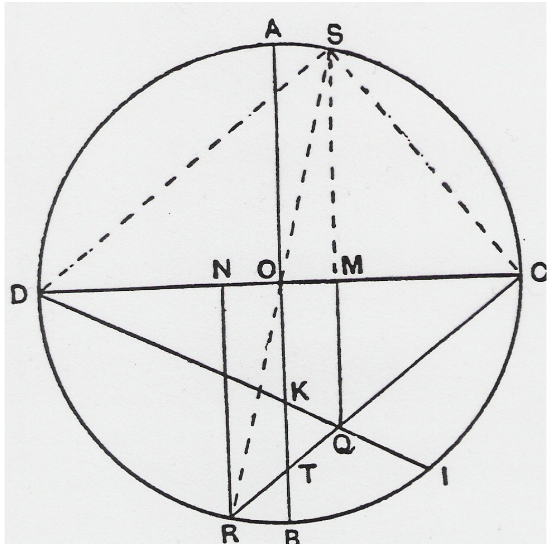
Obtenim que:

$$\frac{BL}{SL}=\frac{SL}{AL}=\frac{AL}{PL}$$



11.17. Solucions de Sporus i Pappos per la duplicació

La solució presentada per Sporus i recollida per Pappos és molt similar a la de Diocles amb algunes petites diferències. Així, en lloc d'utilitzar la cissoide empraven un regle que el feien girar al voltant d'un punt i que interceptava dos parells de segments iguals.



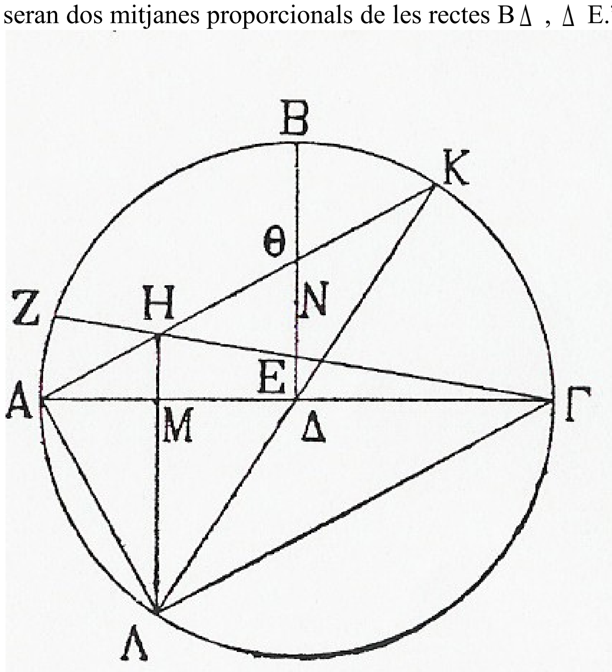
Sigui OD i OK els dos segments entre els quals es vol intercalar dues mitjanes. Si unim DK i perllonguem obtenim sobre el cercle el punt I. Aleshores agafem un regle que passi per C i el fem girar al voltant d'aquest punt fins que toqui DI i OB de manera que QT=TR. Aleshores QT=TR $\Rightarrow$ OM=ON. Q és el mateix punt que trobaríem amb la cisoide i és el que compliria que:

$$\frac{DM}{RN} = \frac{RN}{MC} = \frac{MC}{MQ}$$

El text de Pappos proposa encara una solució més general en la qual es pugui construir el costat d'un cub que tingui una relació donada amb un altre cub. El text és el següent:

> "Finalment, no serà només el cub doble d'un altre cub el que es trobarà per mitjà de la regla aplicada d'una manera que ens és pròpia, sinó també, d'una forma general, el cub que té una raó determinada.
>
> Construïm el semicercle ABΓ ; aixequem des del seu centre Δ la recta Δ B que formi angles rectes, i fem moure una regla al voltant del punt A, de tal manera que un dels seus extrems quedi retingut per una clavilla disposada en A, i que l'altre extrem circula al voltant de la clavilla que es pren com a centre, entre els punts B, Γ . Havent fet aquestes construccions, es demana de trobar dos cubs que tinguin entre ells una relació donada; fem de manera que la relació de la recta BΔ a la recta Δ E sigui la raó donada i prolonguem la recta que uneix Γ E fins el punt Z. Fem ara passar el regle entre els punts B, Γ fins que la part limitada entre les rectes ZE, EB esdevingui igual a la que queda limitada per la recta BE i l'arc BKΓ ; Cosa que es fa fàcilment temptejant contínuament i fent avançar el regle. Quan això estigui fet i la regla tingui la posició AHΘ K, de manera que les rectes HΘ , Θ K siguin iguals; jo dic que el cub construït sobre la recta BΔ és al cub construït sobre la recta $\Delta\Theta$ com la raó determinada, és a dir el de la recta Δ B a la recta Δ E.
>
> En efecte, imaginem que sigui completat el cercle; prolonguem la recta d'unió KΔ fins el punt Λ i tracem la recta d'unió Λ H; aquesta recta és paral·lela a la recta BΔ , ja que la recta KΘ és igual a la recta Θ H i la recta KΔ igual a la recta $\Delta\Lambda$. Tracem, a més, la recta d'unió AΛ i la recta d'unió $\Lambda\Gamma$. Aleshores, ja que l'angle comprés sota les rectes HA, AΛ és recte per estar situat sobre un semicercle, i que la recta AM és una perpendicular, es conclou que el quadrat de la recta AM és al quadrat MH com el

quadrat de la recta Λ M és al quadrat de la recta MA, es a dir com la recta Γ M és a la recta MA, (ja que la recta MA és també a la recta MH com la recta Λ M és a la recta MA; de manera que el quadrat de la recta AM és també al quadrat de la recta MH com el quadrat de la recta Λ M és al quadrat de la recta MA i com la recta Γ M és a la recta MA). Apliquem a una part i a l'altra la raó de la recta AM a la recta MH: Es dedueix que la relació composta per la recta Γ M a la recta MA i el de la recta AM a la recta MH, és a dir de la recta Γ M a la recta MH, és el mateix que la relació composta de la del quadrat de la recta AM al quadrat de la recta MH i del de la recta AM a la recta MH. Ara bé, la relació composada de la del quadrat de la recta AM al quadrat de la recta MH i del de la recta AM a la recta MH és el mateix que la relació del cub construït sobre la recta MH. Però, la recta ΓΔ és a la recta Δ E, és a dir la recta BΔ a la recta Δ E, com la recta Γ M és a la recta MH, i la recta AΔ és a la recta ΔΘ, és a dir la recta Δ B a la recta ΔΘ, com la recta AM és a la recta MH; Per tant, el cub construït sobre la recta BΔ és també al cub construït sobre la recta ΔΘ com la recta BΔ és a la recta Δ E, és a dir en la relació donada. En conseqüència, si fem de manera que la recta ΔΘ sigui a una altra recta, tal com Δ N, com la recta BΔ és a la recta ΔΘ, les rectes ΔΘ, Δ N seran dos mitjanes proporcionals de les rectes BΔ, Δ E."



12. CONCLUSIÓ

Els grecs classificaren els tres problemes d'acord amb la manera com eren resolts: **Plans** si es podien solucionar amb regle i compàs. **Sòlids** si empraven seccions còniques i **Lineals** si feien servir corbes com espirals, quadratrius, concoides, cisoides etc. Aquesta característica va permetre classificar els problemes con referents a llocs plans, llocs sòlids i llocs lineals.

Ben aviat els grecs s'adonaren que els tres problemes especials: la trisecció de l'angle, la duplicació del cub i la quadratura del cercle no eren problemes plans i requerien per a la seva solució del recurs a corbes superiors. Al 420 aC, Hípies va inventar la quadratriu i en el mateix segle Arquites va utilitzar les figures espacials per a duplicar el cub.

Els tres problemes van servir d'incentiu als matemàtics grecs per a la recerca de noves corbes. Així van aparèixer les còniques i altres corbes cúbiques o transcendentals. És per això que l'estudi d'aquests tres problemes constitueix un material privilegiat per conèixer el desenvolupament de les tècniques geomètriques.

Hem de concloure explicant la raó per la qual els tres problemes són irresolubles amb regle i compàs. Els problemes resolubles amb regle i compàs són aquells i només aquells els resultats dels quals són només expressables mitjançant funcions racionals o irracionals quadràtiques. És a dir, els segments construïts amb regle i compàs són segments que poden venir expressats per arrels quadrades i es poden calcular pel teorema de Pitàgores.

La duplicació del cub és un problema lligat a la resolució de l'equació $x^3=2a^3$ i requereix una arrel cúbica $\sqrt[3]{2}$ que no es pot construir amb regle i compàs. La trisecció de l'angle també és un problema de tercer grau:

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$$

si a $3\alpha = \varphi$ aleshores resulta que:

$$4\cos^3\frac{1}{3}\varphi - 3\cos\frac{1}{3}\varphi - \cos\varphi = 0$$

com que trobar l'angle implica trobar el cosinus la solució del problema passa per la resolució de l'equació:

$$4x^3 - 3x - \cos\varphi = 0$$

Així, tant la trisecció com la duplicació són problemes no es poden resoldre amb regle i compàs perquè la seva solució depèn d'una equació de tercer grau.

La quadratura, en canvi, és un problema d'una altra natura ja que depèn de π :

$$\pi r^2 = a^2$$

i π no és expressable com a arrel quadrada. No obstant, aquí la causa no és la incommensurabilitat de π sinó el fet que no sigui solució de cap equació de coeficients enters de cap grau.

La ciència grega ens va llegar tres problemes que van ocupar en major o menor mesura l'interès dels matemàtics i dels aficionats a les matemàtiques al llarg dels segles: La duplicació del cub, la quadratura del cercle, i la trisecció de l'angle. Al segle XIX, Pierre Wantzel va provar que només admetien solució amb les eines euclidianes aquells problemes els resultats dels quals fossin expressables mitjançant funcions algebraiques quadràtiques (LAPPARENT,1895: 133-

135). Així, tant la trisecció com la duplicació resultaven irresolubles amb regle i compàs perquè la seva solució depenia d'una equació de tercer grau. La quadratura, en canvi, era un problema d'una altra natura ja que estava lligat al número π . El 1761 Lambert ja havia provat la irracionalitat de π i al 1882 Lindeman va demostrar la transcendència del nombre π (PUIG ADAM, 1958: 297-302) (BAKER, 1979: 5-8) (JONES; MORRIS; PEARSON, 1992:115-153). Des d'aleshores havia de ser evident que no era possible la resolució dels tres problemes amb regle i compàs.

13.- QUADRATURA I TRISECCIÓ A LA BARCELONA VUITCENTISTA

Per be que els treballs de Lambert i de Wantzel posaven sobre la pista que els tres problemes especials de la geometria grega no eren resolubles amb regla i compàs alguns aficionats a les matemàtiques van tractar infructuosament de trobar-hi solució. També a Barcelona durant el segle XIX es va donar aquest fenomen no solament per la quadratura sinó també respecte a la trisecció.

A Barcelona, a la primera meitat del segle XIX l'absència d'Universitat va ser coberta per dues institucions: La Reial Acadèmia de Ciències i Arts i la Junta de Comerç. Més tard amb la restauració de la Universitat de Barcelona entre 1838 i 1842 i la creació de l'Escola Industrial el 1851, la situació acadèmica es va anar normalitzant (NIETO-GALAN; ROCA-ROSELL, 2006: 273-288).

Va ser precisament en aquelles institucions prèvies a la universitat on es van dirigir els aficionats a les matemàtiques per presentar els seus treballs sobre quadratura i trisecció. La feina d'analitzar-los va correspondre bàsicament als professors de matemàtiques de les càtedres que aquelles institucions sustentaven.

En el arxius de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona i de la Junta de Comerç hem localitzat referències a sis treballs sobre la quadratura que cronològicament es poden classificar en tres períodes: 1) Anteriors a la dominació absolutista. 2) Posterior a la dècada ominosa. 3) Debat a la premsa entre diversos acadèmics .

Si bé el problema de la quadratura va generar molta literatura procedent no sols de matemàtics sinó també dels que hem denominat quadradors, la trisecció, en canvi és un problema que va generar menys literatura en època posterior a la Grècia Clàssica. Tanmateix, hi trobem dos exemples a la Barcelona del segle XIX i principis del segle XX. El primer és de la meitat del segle, 1863, i es deu a un acadèmic, Baltasar Cardona i l'últim correspon a un treball presentat a l'Acadèmia per Jeroni Anyé el 1911.

En els apartats anteriors analitzarem en detall les memòries i els informes corresponents a la quadratura i a la trisecció que tingueren lloc a Barcelona durant el segle XIX com a exemple de com la descoberta de la seva irresolubilitat no aturava a les ments inquietes. Si en el cas de la quadratura, els acadèmics estaven convençuts de la seva impossibilitat, sembla que no succeïa el mateix amb la trisecció, si més no en el segle XIX. Fou als inicis del segle XX quan aquestes institucions científiques locals van tractar d'aturar aquests infructuosos intents.

13.1 .- La situació acadèmica i docent a la Barcelona del segle XIX

A la Universitat de Cervera, l'única existent a Catalunya durant el segle XVIII, les matemàtiques restaven limitades a la facultat d'arts. Allí els ensenyaments es repartien en dos cursos. Primer, elements d'aritmètica, d'àlgebra i geometria i, segon, les aplicacions de l'àlgebra a la geometria. L'escàs contingut i la llunyania del centre neuràlgic del desenvolupament comercial van donar lloc a que les ciències i en particular les matemàtiques trobessin un camí més fàcil per a difondre's a través d'institucions extra universitàries situades a Barcelona com la Reial Acadèmia de Ciències i Arts o la Junta de Comerç.

Al 1756 per iniciativa del vice-rector del Reial Seminari de Nobles de Santiago de Cordelles es va establir una càtedra de matemàtiques finançada amb 250 pesos a càrrec dels drets de portes de la ciutat, gratuïta i no exclusiva per a nobles sinó oberta a tota classe d'alumnes. El professor va ser Tomàs Cerdà (1715-1767), jesuïta nascut a Tarragona que s'havia doctorat a Cervera i que més tard havia estudiat matemàtiques al Reial Observatori de Marsella amb el P. Esprit Pezenas. Els ensenyaments de Cerdà van ser fonamentals per a la formació d'una generació de científics i tècnics no sols perquè va permetre la difusió de les matemàtiques a diverses capes social sinó també perquè foren pioners en la introducció d'alguna de les seves branques com el càlcul.

Al 1764, quan encara Tomàs Cerdà impartia classes en el Seminari de Cordelles, alguns dels seus deixebles juntament amb d'altres que no ho eren, reunits a la rebotiga d'una farmàcia de la Rambla, van decidir de constituir-se en Conferència Fisico-Matemàtica Experimental que fou l'embrió de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts. A finals de 1766, la Conferencia va acordar de nomenar uns professors electes perquè impartissin classes als acadèmics de diverses matèries entre les que hi havia les matemàtiques. Aquesta matèria fou adjudicada a Francesc Bell i Lleopart (?-1804), canonge de Santa Anna i antic deixeble de Cerdà (IGLÉSIAS, 1964). Així, va succeir que durant els primers mesos de 1767 van coexistir a ambdós costats de les Rambles de Barcelona dos classes de matemàtiques, una a la casa de l'acadèmic Josep Marià Abellà, amb vuit alumnes, i l'altra a l'aulari de Cordelles on en substitució de Cerdà, que havia estat destinat al Seminari de Nobles de Madrid, hi hagué com a professor Roque Gila. Tanmateix, aquesta situació va durar només quatre mesos ja que a l'abril d'aquell any, per ordre reial, els jesuïtes foren expulsats.

Per cobrir el buit deixat pels jesuïtes al capdavant de Cordelles, Francesc Subiràs, com a director interí del Seminari de Cordelles, va aconseguir que Francesc Bell també s'ocupés de les classes públiques de matemàtiques fusionant les dues classes en una de sola, facilitant així la continuïtat de l'ensenyament d'aquesta disciplina. Francesc Bell va ocupar aquesta càtedra fins el 1804 en què va morir. Les seves classes es van distribuir en dos cursos acadèmics als que hi assistien al voltant d'un centenar d'alumnes i on ensenyava els textos impresos de Cerdà (BARCA, 1993).

Després de la defunció de Bell, l'Acadèmia va acordar de dividir la càtedra en dues, una de matemàtiques exclusivament i l'altra de matemàtiques i cosmografia amb l'objectiu de poder començar cada any el primer curs. La primera fou encomanada a Isidre Gallarda i la segona a Agustí Canellas. Isidre Gallarda i Martí (1766-1844) era notari reial i causídic i va exercir aquesta professió juntament amb la de docent de matemàtiques. Havia estat deixeble de Bell i l'havia substituït en diverses ocasions. Gallarda va ocupar la càtedra de matemàtiques de l'Acadèmia de Ciències fins que el 1835 va ser exonerat per no presentar les llistes dels alumnes matriculats i tres anys després fou jubilat (NÒMINA, 1905).

A través dels dos opuscles anunciadors d'uns exàmens públics que Gallarda va celebrar amb els alumnes més brillants els anys 1818 i 1823 podem saber que a les seves classes explicava aritmètica, àlgebra, progressions, combinatòria i logaritmes, geometria plana i de l'espai, trigonometria plana, aixecament de plànols, delineació i anivellació, àlgebra aplicada a la geometria i finalitzava amb l'estudi de les seccions còniques. Al 1820 va decidir canviar el llibre de text que utilitzava fins aleshores que era els *Elementos de matemáticas* de Benet Baïls pel *Compendio de Matemáticas* de Jose Mariano Vallejo.

La càtedra de matemàtiques i cosmografia, l'altra càtedra en què l'Acadèmia havia dividit la càtedra de Cerdà, va ser ocupada inicialment per Agustí Canellas i Carreras, després per Joan Gerard Fochs i Cherta i finalment per Pere Martir Armet i Soler.

Agustí Canellas (1765-1818), que havia estat de jove alumne de l'Escola de Nàutica, va abandonar els estudis després del seu primer viatge per ingressar a l'orde dels trinitaris on va exercir la docència. Al 1803, pocs dies després de ser nomenat acadèmic de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona, va acompanyar a Mechain en la mesura de la prolongació del meridià des de Barcelona fins a les Illes Balears i, poc després, va impartir classes de cosmografia i matemàtiques a l'Acadèmia encara que per poc temps ja que al 1806 es feu càrrec, per designació reial, de la direcció de l'Escola de Nàutica (RICART, 1882).

Joan Gerard Fochs i Cherta (?-1821) era canonge de la catedral de Barcelona i es va ocupar d'aquestes classes fins a la seva mort. Fou el primer dels professors de l'Acadèmia que va realitzar exàmens públic el gener de 1818, abans i tot que Gallarda. Dos anys després va fer-ne un altre en el qual els alumnes van exposar les nocions bàsiques d'aritmètica, geometria, estereotomia, trigonometria plana i les seccions còniques, continguts que resumeixen les explicacions de les classes, en les quals feia servir els textos de Cerdà. Al 1821, el seu darrer curs, van assistir a les seves classes 104 alumnes i poc després, Fochs va caure malalt de febre groga i el va substituir durant un any Salvador Magriñá (?-1833), sots-tinent de l'exèrcit i antic deixeble de Fochs, el qual va intentar de canviar els textos de Cerdà pel *Compendio* de Vallejo aixecant irades protestes dels alumnes (BARCA, 1995). A la mort de Fochs, contràriament al que es podria suposar no el va substituir Magriñá sinó que l'Acadèmia va triar Pere Martir Armet que aleshores gaudia d'un gran prestigi entre els acadèmics matemàtics.

Pere Martir Armet i Soler (1770-1850) havia nascut a Barcelona a la si d'una família de fusters i, per això, la seva primera activitat professional va ser també pertanyent a l'artesanat encara que en un altre sector. Va aprendre l'ofici de mitger de seda que va exercir fins la mort del seu pare el 1805. Amb gairebé quaranta anys, abans de la Guerra del Francés, va començar a estudiar matemàtiques. Durant aquesta contesa va donar classes a alguns oficials i després, arruïnat en els seus negocis tèxtils, va decidir dedicar-se a l'ensenyament de les matemàtiques en un moment en què es feia sentir a Catalunya la falta de professors d'aquesta disciplina tan necessària per fer desenvolupar el comerç i la indústria. Va començar per fer classes particulars i poc després va dirigir una escola d'instrucció primària. Gràcies a la seva amistat amb Canellas va accedir a l'Acadèmia en 1817 on va llegir una memòria en què refutava un escrit sobre la quadratura del cercle i on poc després fou nomenat catedràtic de matemàtiques i cosmografia. (MAYMÓ, 1852). A les seves classes, a les que assistien al voltant de 50 alumnes a primer curs i només 8 o 10 a segon, Armet va fer servir un altre text de Vallejo, el *Tratado Elemental de Matemáticas.* Més tard, va separar les classes de cosmografia de les de matemàtiques i degut a la poca assistència d'alumnes d'aquesta matèria, només 3 o 4, va deixar d'impartir-la en la dècada dels anys trenta (BARCA, 1995 a).

L'absència d'universitat a Barcelona no va ser motiu perquè es descuidessin les matemàtiques. Però, a aquesta constatació cal afegir que des de 1805, l'Acadèmia va llogar unes aules a la Junta de Comerç perquè allí s'impartís les classes de química, de taquigrafia i d'estàtica i hidrostàtica. Per la qual cosa aquesta institució va poder complir un dels objectius dels seus estatuts, esdevenir també un cos docent. Podem, doncs, imaginar en el primer terç de segle XIX uns locals de l'Acadèmia, els mateixos on Cerdà havia impartit les seves classes, fent les funcions de centre docent universitari amb un nombre elevat d'alumnes que assistien, be a les classes de matemàtiques, be als laboratoris de química o be experiments d'estàtica (BARCA, 1995 a).

Al 1819, la Junta de Comerç, institució que vetllava pels interessos del Comerç, tenia al seu càrrec, a més de l'Escola de Nàutica, la de Nobles Arts, la de Química aplicada a les Arts, la de

Taquigrafia, la de Càlcul i Escriptura doble, la d'Estàtica i Hidrostàtica, la de Física experimental, la d'Economia Política, la d'Arquitectura i la d'Agricultura i Botànica (RUIZ, 1919) (IGLÉSIES, 1969) (MONÉS, 1987). Els professors que explicaven algunes matèries científiques es trobaven amb dificultats per desenvolupar les seves respectives disciplines degut al baix nivell de coneixements matemàtics dels seus alumnes. Per això, la Junta de Comerç va decidir de crear unes classes de matemàtiques aprofitant els ensenyaments que d'aquesta matèria ja s'impartien en algunes de les seves escoles. Així va acordar que la classe de primer any de nàutica ho fos també de matemàtiques i que en ella s'expliqués el càlcul numèric i literal incloses les equacions de segon grau, la geometria elemental, la trigonometria plana i les seccions còniques i aconsellava d'emprar els *Elementos de aritmética, álgebra i geometria* de Juan Justo García. A més, per aquells alumnes que volguessin aprofundir més en els coneixements matemàtics o volguessin assistir a les classes de les càtedres més científiques, va crear un segon curs de matemàtiques on podrien aprendre trigonometria esfèrica, càlcul integral i diferencial, principis generals d'estàtica i mecànica i principis d'hidràulica. Aquests dos cursos de matemàtiques els va encomanar al professor de primer de nàutica, Onofre Novellas.

A part d'aquesta càtedra de matemàtiques, la Junta de Comerç va crear una altra d'aritmètica i geometria pràctica que va encomanar al professor de Càlcul i Escriptura doble, Antoni Alà, i que anava adreçada als alumnes de Comerç o Agrimensura (BARCA 1996a).

Onofre Jaume Novellas i Alavau (1789-1849) fou alumne de l'Escola de Nàutica i deixeble d'Agustí Canellas al qual va substituir durant la seva malaltia i, després de la seva mort, va ocupar-se del primer curs de l'Escola de Nàutica dirigida aleshores per Manuel Sans (ORIOL, 1850). Poc després d'iniciar les classes de matemàtiques de la Junta de Comerç, el 1819, Novellas fou nomenat acadèmic i més tard va ocupar diversos càrrecs a la direcció d'òptica i cosmografia i a la secció de ciències fisico-matemàtiques i al 1847 fou nomenat vicepresident de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts. Quan va ser restaurada la universitat a Barcelona, Novellas va ocupar interinament la càtedra de càlcul sublim (BARCA, 1991).

La càtedra d'aritmètica i geometria pràctica, l'altra que havia creat la Junta de Comerç, tenia uns continguts més elementals i més pràctics. Dels temes aritmètics dedicava molta atenció a l'estudi de la regla de tres directa, inversa, composta i a la regla conjunta i pel que fa a la geometria feia especial atenció als aspectes pràctics de la geometria plana dedicant algunes sessions de treball de camp per mesurar distàncies accessibles i inaccessibles amb instruments, i per fer anivellaments i aixecaments de plànols. El llibre emprat seguint les recomanacions de la Junta de Comerç era *Aritmética y geometria práctica de la Real Academia de San Fernando* de Benet Bails i Antonio de Varas (ARXIU J.C.).

El professor d'aquesta càtedra, Antoni Alà i Ratera (?-1831) havia estat alumne de Fochs abans de la Guerra del Francés. Al 1815 va accedir a l'Acadèmia presentant una memòria *Sobre el cálculo analítico de los cinco cuerpos regulares, el tetraedron, el exaedron, el octaedron, el dodecaedron y el icosaedron*. Poc després, Alà va ser admès com a professor de Càlcul i escriptura doble de la Junta de Comerç, una càtedra que havia de servir per introduir els estudiants en les novetats de la comptabilitat aplicada al comerç. La seva ideologia monàrquica i absolutista el va portar a mantenir-se ocult durant el trienni liberal i fou substituït pel seu deixeble Pere Guixà, el qual també va ocupar-se de les classes, per raons de malaltia, des de finals de 1829 fins la seva mort el 1831. Posteriorment es van convocar oposicions i les va guanyar Francesc Claret el qual es va fer càrrec d'aquestes classes en els cursos següents.

Repressió, tancament de centres docents i depuració de professors d'ideologia liberal foren la resposta de l'absolutisme als breu període de govern liberal de 1821 a 1823. A Barcelona, la repressió absolutista durant la dècada ominosa es va fer sentir a l'Acadèmia de Ciències que fou clausurada per haver fet costat al govern liberal. No obstant això, les classes de matemàtiques d'aquesta institució van poder continuar, malgrat deixar de percebre l'assignació econòmica municipal, gràcies al voluntarisme dels dos professors Gallarda i Armet (BARCA, 1995a).

L'altra classe que va continuar sense interrupcions va ser la de la càtedra de matemàtiques de la Junta de Comerç. Durant el curs de 1824 va tenir lloc un fort increment d'alumnat que va obligar a Novellas a proposar un canvi en els horaris de manera que permetés impartir primer i segon curs cada any ajuntant els alumnes de primer curs de nàutica i de matemàtiques i fent servir un únic llibre de text per a les dues escoles, el *Compendio* de Vallejo.

Les condicions durant l'època isabelina, van ser més satisfactòries pel desenvolupament científic que les del regnat de Ferran VII. Va desaparèixer la repressió, van tornar alguns científics exiliats i l'assimilació de les novetats científiques europees va resultar més fàcil. Al 1833 a Barcelona va tornar a obrir-se la Reial Acadèmia de Ciències i Arts amb molta empenta i il·lusió. Dos anys després, a proposta del governador civil interí Josep Melcior Prat, aquesta institució de crear deu càtedres (Ideologia, Astronomia, Geografia i cronologia, Geometria aplicada a les arts, Mecànica teòrica, Mineralogia i geologia, Zoologia i taxidèrmia, Explotació de mines, Economia industrial i Física especulativa i pràctica) que afegides a les dues de matemàtiques existents van convertir aleshores l'Acadèmia en una autentica facultat de ciències

Les dues càtedres de matemàtiques van continuar de manera similar, una a càrrec de Pere Martir Armet i l'altra a càrrec de Josep Alegret en ser Gallarda exonerat de les classes. Josep Alegret i Ferrer havia estat deixeble de Fochs a les classes de l'Acadèmia i des del 1834 substituïa a Gallarda en les seves classes. Per això va passar a ocupar la seva càtedra fins el 1838 en què va renunciar per dedicar-se a les escoles de la Casa de la Caritat i aleshores se'n feu càrrec de la càtedra Juan Rogés.

Juan Rogés i Moragas (1806-1859) va estudiar al Seminari Conciliar i va assistir a les classes de matemàtiques de l'Acadèmia, al 1829 va ser nomenat mestre de primera classe i va exercir la docència en una escola de Girona fundada per ell. Al 1831 va tornar a Barcelona on va ser nomenat acadèmic i va ocupar la càtedra de matemàtiques durant quatre anys fins al 1842 en què va renunciar per substituir a Jaume Balmes en càtedra de matemàtiques de Vic. (NÒMINA, 1909)

Després de Rogés va ocupar la càtedra de matemàtiques de 1843 a 1845 Josep Oriol i Bernadet (1811-1860) que havia estudiat a les escoles de la Junta de Comerç i havia estat deixeble i amic personal de Novellas. Va estudiar arquitectura a la l'Acadèmia de San Fernando i, a més de ser autor de diversos projectes arquitectònics, va exercir la docència de les matemàtiques a diferents centres com a la Societat Econòmica de Amigos del País de Tarragona el 1836. Al 1839 va fundar l'Institut Tarraconense on també va ensenyar les matemàtiques i al 1847 va obtenir la càtedra de matemàtiques elementals de la Universitat de Barcelona. (NÓMINA, 1909).

L'etapa isabelina també fou beneficiosa per la càtedra de matemàtiques de la Junta de Comerç ja que va aconseguir deslligar-se de l'Escola de Nàutica i va rebre el reconeixement reial.

Els canvis que se succeïren en els ensenyaments en la dècada dels quaranta van tenir repercussions considerables en la docència d'aquestes càtedres. La restauració de la Universitat de Barcelona entre 1838 i 1842 fou el primer pas per a la normalització de la societat catalana. La promulgació del Pla Pidal de 1845 va permetre que les facultats de filosofia impartissin uns estudis d'ampliació de ciències que incloïen les matemàtiques sublims. La creació per decret de 1851 de les Escoles Industrials va absorbir totes les escoles de la Junta de Comerç i amb ella la càtedra de matemàtiques de Novellas. I finalment, la Llei Moyano de 1857 va consagrar els Instituts provincials i va establir les facultats de ciències. Tots aquest canvis van convertir en innecessària la estructura docent que la societat civil catalana s'havia dotat durant la primera meitat de la centúria.

Tanmateix, les càtedres de matemàtiques de l'Acadèmia van continuar fins a 1870 gràcies a l'esforç, primordialment, de Marià Maymo i Llimona (1818-1871) que havia estat alumne de les escoles de la Junta de Comerç i regent de matemàtiques de segona classe de la Universitat Literària i d'altres socis de l'Acadèmia com Ferran Rodríguez de Alcántara, Baltassar Cardona i Carles Ferrer Mitayna. Així, mentre la càtedra de matemàtiques de la Junta de Comerç i els professors que l'ocuparen, Ramón Avellana i Alexandre Novellas (fill d'Onofre), van integrar-se dins dels estudis de l'Escola Industrial, les càtedres de l'Acadèmia van anar apagant-se per falta d'alumnat i per pèrdua de validesa en front de la nova estructura docent.

Les càtedres de matemàtiques de l'Acadèmia i la de la Junta de Comerç van formar la majoria dels professors que ocuparen les càtedres de matemàtiques a Catalunya. Però no només es van formar matemàtics sinó també científics, tècnics, comerciants, marins i artistes. En aquests context històric és en el que acadèmics i aficionats presenten memòries de quadratura i de trisecció que generen la documentació que a continuació analitzaren.

13.2.- Descripció de les memòries de quadratura

Respecte a les memòries de quadratura es poden establir dues etapes. La primera correspon als treballs anteriors al trienni liberal. La segona etapa, a treballs posteriors a la dècada ominosa.

Pel que fa a la primera etapa, els treballs que es conserven consisteixen en dictàmens o informes presentats per acadèmics relatius a memòries presentades a la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona o que d'una manera o altra havien anat a parar a mans dels acadèmics i que aquest havien considerat d'interès analitzar-les. Hem localitzat tres:

1) Dictamen d'A. Canellas sobre el treball: "La quadratura del circulo y razón del diámetro a la circunferencia" de Pablo Vallaure.[4]
2) Un informe de Francesc Sanponts sobre un treball de refutació d'una quadratura presentat per Pere Martir Armet.[5]
3) Treball elaborat per Joan Gerard Fochs titulat: *Informe sobre la disertación o sea tratado del Sr Caetano Marchetti Tomassi sobre la cuadratura del círculo.*[6]

Posterior a la dècada ominosa, al que hem denominar segona etapa, hi ha dues memòries que no són presentades a l'Acadèmia, però que implica a acadèmics en el seu anàlisi o en la seva crítica.

4) El 21 d'octubre de 1846, D. M de A. M. presenta a la Junta de Comerç la seva obra a la que acompanya el programa sobre la quadratura del cercle.[7] Tres anys després, el 15 de gener de 1849 el mateix personatge, M. de Almd[a]. Margard[e], presenta a la mateixa institució: *La cuadratura del círculo y la circulación del cuadrado —o sea— La reducción del círculo a un cuadrado, y de este a un círculo, de la misma área*.[8]

---

[4] Arxiu RACAB 156.4 (CF 27).
[5] Expedient personal de Pere Martir Armet. Arxiu RACAB.
[6] Arxiu RACAB, 156.5 (CF 27)
[7] Arxiu Junta de Comerç, lligall CI, 1, 503-510.
[8] Arxiu Junta de Comerç lligall CL.

5) El 21 de gener de 1885, l'acadèmic Laur Clariana Ricart va llegir la memòria *Impugnación a la cuadratura del círculo resuelta por D. Leoncio Agües*[9]

Tots aquests intents de resoldre la quadratura van tenir resposta de refutació d'acadèmics. El quadre següent recull el nom dels quadradors, el valor del nombre π acceptat com a vàlid i els acadèmics que van analitzar aquests treballs.

Quadradors	Raó de la circumferència al diàmetre	Resposta d'Acadèmics
Pablo Vallaure	$\frac{63}{20} = 3{,}15$	Informe d'Agustí Canellas
Desconegut		Informe de Sanponts sobre una refutació de Pere Martir Armet
Caetano Marchetti Tomassi	$3\frac{102327469}{760326588} = 3{,}134583573$	Informe de Joan Gerard Fochs adreçat al Marquès de Llupià
M. de Almd[a]. Margard[e]	$3\frac{1}{8} = 3{,}125$	Informe d'Onofre Novellas i Francesc Claret
Leoncio Agües	3,1625	Memòria de Laur Clariana
José Fola Igúrbide	3,14211356239…	Diversos articles a la prensa de Lauro Clariana, José Doménech Estapá i Miguel Marzal Bertomeu

En primer lloc analitzarem una per una les memòries abans esmentades i deixarem per un apartat posterior l'anàlisi del comportament i actituds dels quadradors i dels acadèmics respecte aquest problema.

13.2.1- Dictamen d'A. Canellas sobre el treball: "La cuadratura del circulo y razón del diámetro a la circunferencia" de Pablo Vallaure

Aquest informe critica la proposta de Vallaure d'utilitzar la raó del diàmetre a la circumferència de 20/63, és a dir $\pi = 63/20$. Canellas prova que no es certa i per demostra-ho va dividir un arc de 30º en 16 vegades per la seva meitat obtenint així un angle de poc més d'un segon i mig. Després va determinar el valor del seu sinus i de la seva tangent, cosa que li permeten trobar les longituds d'unes figures que haurien de ser inferiors i superiors respectivament al cercle. Ara bé després d'aproximar aquestes longituds fins a les mil milionèsimes arriba a la conclusió que la major d'elles és menor que la circumferència. Cosa que prova que la raó donada per Vallaure és falsa.

Canellas comença per establir la proposició que afirma que la raó 20:63 que es proposa no correspon a la que hi ha entre diàmetre d i circumferència L. Així doncs, si $\frac{d}{L} \neq \frac{20}{63}$ llavors serà $\frac{d}{P} = \frac{20}{63}$ essent P>L o P<L. Observis que Canellas estableix un tipus de raonament que recorda al mètode d'exhaustió al qual li dona la forma de teorema "Todo número que expresa la longitud de

[9] Arxiu RACAB 84.18 (CF 28)

un diámetro, es a otro número precisamente menor o mayor que la circunferencia". Per demostrar això suposa un cercle de radi 10.000.000.000 del qual agafa un angle de 30º i el divideix 16 vegades per la seva meitat. Per fer això resol l'operació $\frac{30}{2^{16}}$ en el sistema sexagesimal. Canellas, però, no es queda amb els segons sinó que segueix desenvolupant en unitats de base seixanta fins a l'ordre vuit aconseguint un angle de 1" 38"'52^{iv} 37^{v} 1^{vi} 52^{vii} 30^{viii} . Com que divideix per 2^{16} un angle de 30º que és la sisena part de 180º, l'arc corresponent a aquest angle tant petit hi serà $2^{16}.6 = 393.216$ vegades en una semicircumferència.

Tot seguit com que el sinus d'aquest angle és menor que l'arc i la tangent és més gran, Canellas determina aquestes raons trigonomètriques que després multiplica per 393.216 obtenint una quantitat manifestament menor i major respectivament que la semicircumferència.

> "De manera que la verdadera longitud de la semicircunferencia ha de estar comprendida entre el nº resultante del seno .... 31415926535,159808 millonésimas y el nº resultante de la tangente 31415926536,339456 millonésimas."

Cal observar que el que finalment fa no és considerar uns polígons de costat el sinus i la tangent de l'angle de poc més d'un segon, sinó que amb el valor del seu perímetre considera unes semicircumferències inscrita i circumscrita a la donada anomenada també vertadera. Donat que el radi és a la semicircumferència com el diàmetre és a la circumferència sencera ($\frac{r}{\pi \cdot r} = \frac{2r}{2\pi \cdot r} = \frac{d}{L}$) El diàmetre 20.000.000 és a la circumferència formada per la suma de tots els sinus anteriors (62831853071,199264) que és manifestament menor que la vertadera. Aquesta constatació el porta a afirmar que:

> "Resulta pues evidentemente demostrado, que siendo el diámetro 20 la circunferencia ha de ser más o menos de 63. Luego, no es razón exacta, cual pretende la de 20: 63 del diámetro a la circunferencia q. e .2 &u."

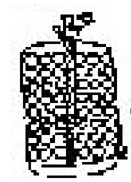
No obstant si agafa la seva tangent aconseguirà una circumferència que, en principi, és major de la vertadera. Però, sorprenentment, li dona un valor menor (62831853072,28570), cosa que li permet afirmar que:

> "Es indubitablemente cierto que 63 será circunferencia inexacta por exceso; es así, que la circunferencia que resulta por cuarto término de la proporción resultante de la tangente, es menor que 63; Luego la circunferencia que propone el Sr Vallaure es defectuosa por exceso.

Després de construir unes circumferències inscrites i circumscrites a la donada amb el recurs als valors del sinus i la tangent, Canellas arriba a la conclusió que tant una com l'altra tenen una longitud inferior a la proposada, en conseqüència la raó del diàmetre a la circumferència que proposava Vallaure és errònia per excés.

13.2.2.- Un informe de Francesc Sanponts sobre un treball de refutació d'una quadratura presentat per Pere Martir Armet

Aquest informe es refereix en darrera instància a un treball sobre quadratura sorgit a partir d'un problema pràctic consistent a construir un sac de metralla que sigui capaç d'allotjar sis bales. Un sac de metralla era un estri per guardar bales o qualsevol mena de projectils. No hem trobat massa informació al respecte solament un dibuix on es pot intuir que tenia forma de cilindre amb dos bases circulars rígides i amb una superfície lateral formada per una xarxa flexible.[10]



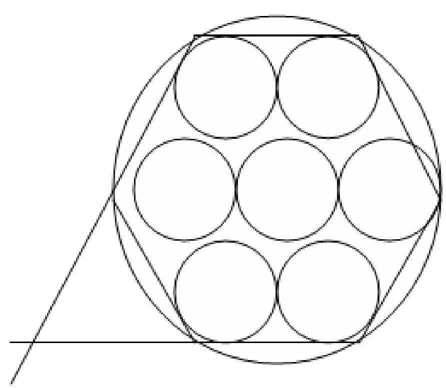
Sac de Metralla

El sac, del qual ens parla l'informe de Francesc Sanponts, havia de ser capaç d'allotjar sis bales. Aquest requeriment ens mostra la necessitat de conèixer la superfície de les bases i conseqüentment la seva quadratura per a permetre allotjar els sis projectils.

La informació de que disposem sobre aquest cas és molt minsa. D'entrada l'informe de Sanponts fa referència a altres dos treballs. Un primer, consistent en una proposta de quadratura d'autor desconegut i un segon, de refutació del primer elaborat per Pere Martir Armet, documents fins el moment no localitzats. Aleshores sols disposem de l'informe de Sanponts que per les seves característiques no és gaire explícit.

> "Coloca en primer lugar la figura geométrica en que se funda este problema describiendo un círculo mayor que encierra exactamente siete círculos menores, y después de haber formado un hexágono inscrito en el círculo mayor apoyando sus lados en la circunferencia de este, por medio de la prolongación de uno de los radios oblicuos que se hace secante, forma un triángulo por medio de otra secante que dirige desde el punto de concurrencia de estas dos líneas hasta el punto de contacto del radio oblicuo inmediato del mismo hexágono; y que constituye el tercer lado del triángulo. De aquí resulta diferentes triángulos mistilíneos que dan pie a la demostración mediante la exposición de otras figuras consecuentes a la primera: demostración que no es posible extractar para dar a V.E. una suficiente idea sin la ejecución de todas las figuras geométricas que forman las partes esenciales del teorema, lo cual sería producir toda la primera parte de la memoria.

D'aquest paràgraf es pot potser intuir una figura similar a la que presentem a continuació a partir amb la qual es basarien els càlculs de la quadratura



Però no hi ha demostració perquè Sanponts va considerar que no era el lloc apropiat per

[10] Aquest dibuix es pot trobar a *www.histarmar.com.ar/InfHistorica/ Berisso/losbuquesdelaepoca.htm*.

posar-la, decisió que ens dificulta d'analitzar la possible solució. Tampoc recull la refutació d'Armet de la qual esmenta la construcció d'unes figures per rebatre la veracitat de quadratura:

> Lo mismo debo decir a V.E. de la parte segunda del escrito que pertenece a la refutación que hace del teorema D. Pedro Martir Armet, quien ha tenido también que trazar varias figuras para desvanecer las equivocaciones padecidas por el autor del pretendido hallazgo de la cuadratura del círculo, y así esta parte tampoco es susceptible de extracto por igual motivo, es menester verla según está extendida en la memoria misma.

Figures que no sabrem com eren si no es localitzen aquestes memòries, ja que Sanponts va optar, també, per no posar-les. No obstant això les va haver d'analitzar per poder emetre un veredicte favorable a Pere Martir Armet, el qual li va obrir les portes de l'Acadèmia de Ciències.

El problema d'artilleria a que fa referència Armet: construir un cercle que contingui a set cercles menors, no és un altre que la versió plana del problema de l'empaquetament d'esferes. Aquest problema consistia en determinar quantes bales de canó es podien apilar a la coberta d'un vaixell de manera que ocupessin el menor espai possible.[11]

L'origen d'aquest problema es remunta, amb tota seguretat, als inicis de l'artilleria, però la seva formulació matemàtica s'enceta al segle XVI quan Walter Raleigh (1554-1618), militar i aventurer anglès, va demanar al matemàtic Thomas Harriot si coneixia un mètode senzill per calcular el nombre de bales de canó que es podien apilar. Harriot el va resoldre sense dificultat però es va plantejar el problema de manera més general. Com disposar les bales per tal que l'espai ocupat fos mínim. Va escriure a Johannes Kepler, el qual després de fer alguns experiments va arribar a la conclusió que la disposició més eficient era la cúbica de cares centrades, la mateixa que feien servir els venedors de fruites per apilar taronges o els artillers en apilar bales sobre la coberta d'un vaixell. Aquest plantejament es conegut com la conjectura de Kepler i la seva formulació matemàtica consistiria en determinar la disposició de les esferes en la qual la densitat fos la més gran possible, entenent per densitat el quocient entre el volum de les esferes dividit pel volum de la capsa que les conté. En el cas de l'apilament proposat per Kepler la densitat era de $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0{,}72$. No obstant si es resol el problema en dues dimensions, l'apilament més eficient era també conegut i consistia en una disposició hexagonal on cada cercle quedava envoltat per sis cercles iguals. En aquest cas la densitat ascendia a $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0{,}906$. Kepler no va poder, però provar que aquesta densitat era la més gran possible.[12]

---

[11] Juan Navarro Loidi, reconegut historiador de la tecnologia militar i col·lega de congressos i trobades, ha estat qui m'ha posat sobre la pista d'aquesta conclusió ja que em va suggerir l'article de *El País* de 4 de gener de 2006 on hi havia unes referències al problema de l'empaquetament d'esferes. Després sols he hagut d'estirar del fil per trobar una gran quantitat d'informació bàsicament a internet. Així doncs, hi trobaren unes primeres referències a CÓRDOBA BARBA, Antonio "La demostración de la conjetura de Kepler .Un matemático logra desentrañar un problema planteado por el genio alemán hace cuatro siglos. *EL PAÍS* - 04-01-2006. http://www.elpais.es/articulo/elpfutpor/20060104elpepifut_1/Tes/. QUIRÓS GRACIAN, Adolfo (2000) "La conjetura de Kepler". Dins MARTINON, Antonio (ed) *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos.* Madrid: Nivola ediciones, 485-488.

[12] AUROUX, Denis (2000) "Tas d'oranges, cristaux et empilements de sphères" CNRS: École Polytechnique. http://www-math.mit.edis/~auroux/papers/beaubourg-notes.pdf. BACHOC, Christine Cercles et sphères http://www.math.u-bordeaux.fr/bachoc. DEMARTHON, Fabrice "Kepler avait raison" http://www.infoscience.fr/articles/articles_aff.php3?Ref=45.

Al 1953 L. Fejes Tóth va reduir la conjectura a un enorme conjunt de càlculs. Ha calgut esperar al 1998 perquè Thomas Hales presentés una temptativa de demostració amb l'ús de l'ordinador on ha resolt al voltant d'un centenar de milers de problemes d'optimització lineal. Tot sembla indicar que, després de superar una acurada supervisió, ha rebut l'aprovació per a publicar la prova de la conjectura a la prestigiosa revista *Annals of Mathematics*.[13]

El tema dels empaquetament d'esferes no és un tema antic o una entelèquia matemàtica. És un problema d'una gran transcendència i que té una gran aplicació en el camp de la informàtica. Serveix de fonament als codis que detecten i corregeixen errors i que es fan servir en l'emmagatzematge d'informació en discos compactes i per a comprimir informació que després serà enviada arreu.[14]

13.2.3.- Treball elaborat per Joan Gerard Fochs titulat: *Informe sobre la disertación o sea tratado del Sr Caetano Marchetti Tomassi sobre la cuadratura del círculo*

Joan Gerard Fochs va analitzar la quadratura de Tomassi i va elaborar un informe del qual només es conserva el text i en canvi s'han perdut les figures. El text està elaborat a partir dels apartats del treball de Tomassi de manera que, sense reproduir-los en la seva totalitat, Fochs va donant la seva opinió sobre cada un d'ells. El fet de no disposar ni del treball de Tomassi ni de les figures de l'informe de Fochs fan pràcticament impossible l'anàlisi d'aquest manuscrit. No obstant això se'n poden treure algunes conseqüències sobre els errors de Tomassi que Fochs detecta.

> Y practicando lo propio en las demás fórmulas se ve que este hombre da todas las raíces inconmensurables un valor determinado, poniendo por denominador a la resta el duplo de la raíz hallada, lo que es un grandísimo absurdo.

Fochs posa de manifest una manera errònia de determinació de les arrels quadrades incommensurables de manera que la operació $\sqrt{98} - 7$ que dona aproximadament 2,89949, Tomassi la fa exacta i igual a $2\frac{17}{18}$.

Aquestes simplificacions donen lloc a una raó de la circumferència al diàmetre de 3

[13] HALES, Thomas C. "A proof of the Kepler conjecture" *Annals of Mathematics* 162 (2005) 1065-1185. També hi ha moltes dades sobre la història i la recent prova de Hales a "Conjecture de Kepler encore 20 ans de vérifications" http://www.larecherche.fr/special/web/webhs20p2.html. També trobareu més informació a http://www.math.lsa.umich.edu/~hales/ i a http://www.math.pitt.edu/~thales/.

[14] Un codi informàtic és l'elecció d'un conjunt de 0 i 1 de longitud n de manera que permet detectar i corregir els errors de transmissió. Quan es produeix un error, un codi vàlid esdevé no vàlid i es detecta l'error. I si hi ha un únic codi vàlid prou similar al codi no vàlid rebut, aleshores serà possible de retrobar quin era el valor correcte sense haver de tornar a enviar les dades un altre cop. Trobar un bon codi és trobar nombrosos punts de l'espai de n dimensions suficientment allunyats els uns dels altres. El nombre de punts condiciona la quantitat de dades útils que serà possible enviar entre els n bits que seran transmesos en cada element. La distancia entre els codis vàlids està directament lligat al nombre mínim d'errors de transmissió que poden transformar un codi vàlid en un altre de vàlid. Posant esferes tan grosses com sigui possible a cada punt s'obté in apilament. Quan més prestacions té el codi vol dir que l'apilament d'aquestes esferes és més dens.

$\frac{102327469}{760326588}$, valor de π= 3,134583573 que no convenç a Fochs ja que li sembla menys exacte encara que les aproximacions que havien fet alguns matemàtics del segle anterior:

> Añadiendo que la razón del diámetro a la circunferencia del Sr. Marchetti Tomassi no es tan aproximada a la exactitud con la de varios otros ingenios sublimes que han trabajado sobre el asunto como la de Halley, la de Mr. Machin profesor de Astronomía, y secretario de la Real Sociedad de Londres y otros varios

La precisió era molt encertada, ja que, per exemple, l'aproximació de Wallis publicada el 1655 a *Arithmetica infinitorum* es basava en l'expressió següent:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8...}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9...}$$

i donava un valor de π = 3,141592654. James Gregory al voltant de 1668 va obtenir una aproximació de l'invers del π és a dir la raó del diàmetre a la circumferència:

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318309886...$$

que representava un valor de π = 3,141592655. Totes dues eren, com afirmava Fochs, aproximacions més exactes que la que donava Tomassi.

13.2.4.- *La cuadratura del círculo y la circulación del cuadrado —o sea— La reducción del círculo a un cuadrado, y de este a un círculo, de la misma área* de M. de Almd[a]. Margard[e] i la resposta d'Onofre Novellas i Francesc Claret.

L'informe elaborat per Onofre Novellas i Francesc Claret el 1846 per requeriment de la Junta de Comerç s'havia redactat sense haver pogut llegir el text sobre la quadratura presentat per M de A M. Tres anys després, aquest mateix autor remet el seu treball a la Junta acompanyat de cinc grans làmines. No sabem les raons per les que ho va fer ni tampoc hem localitzat cap resposta ni d'aquesta institució, ni dels professors implicats. Però els esdeveniments probablement expliquen aquestes mancances ja que Novellas va morir a l'agost d'aquest any i les Escoles de la Junta passaren a formar l'Escola Industrial Barcelonesa dos anys després i molt probablement el manuscrit va quedar sense resposta.

El manuscrit del 1849 està signat per M. de Almd[a]. Margard[e] i duu a terme una construcció amb regle i compàs consistent a traçar un cercle de 8 unitats de diàmetre, un quadrat inscrit de diagonal 8 i un quadrat circumscrit de costat 8. L'autor construeix un quadrat intermedi recorrent a la construcció d'uns triangles isòsceles auxiliars. Aquest plantejament, que recorda a l'antiga quadratura atribuïda a Brisó, proporciona de fet un valor irracional de π.

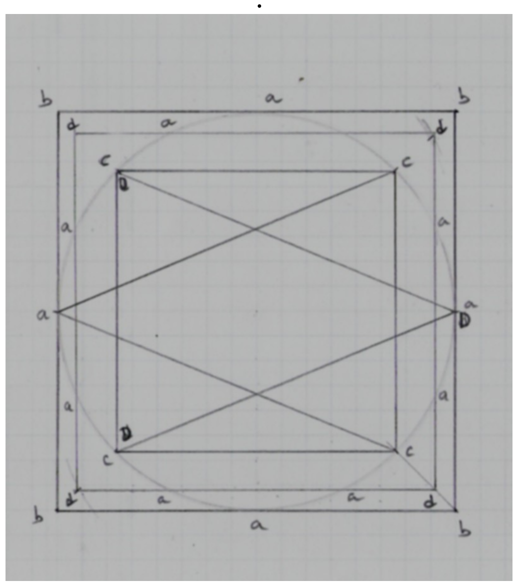
Tanmateix, l'autor considera que la raó de la circumferència al diàmetre, és a dir el nombre π és una fracció $\pi=3\frac{1}{8}$. Aquesta precisió justifica el contingut de l'informe que Novellas havia fet a cegues tres anys abans ja que fa referència a que ja estava provat que la raó de la longitud de la circumferència al diàmetre no era racional.

L'autor presenta el seu treball com un text explicatiu de les làmines i per això diu que s'estalvia les paraules per donar més relleu als fets que en aquest cas són dos: quadrar el cercle i circular el quadrat. Això vol dir que es plantejava la resolució del problema directe, la quadratura del cercle, i del problema recíproc, trobar un cercle de la mateixa àrea que un quadrat:

> Presento mis trabajos sin discurso que pudiera dar realce a los mismos; por cuanto la cuestión es de hechos y no de palabras.
>
> Daré una sencilla explicación, y diré lo que me ocurre sobre la materia.
>
> El círculo y el cuadrado son las dos figuras geométricas más perfectas, y de consiguiente susceptibles de cuadrarse la una y de circularse la otra, y estos resultados han de obtenerse inmediatamente sobre las mismas figuras, por medio de operaciones gráficas, consistiendo hallar el ángulo del cuadrado en aquel caso; y la magnitud del radio en este

El mètode per quadrar el cercle descrit en aquesta memòria consisteix en el següent: Primer es traça un cercle (*aaaa*) de diàmetre 8. A continuació es dibuixa un quadrat inscrit en el cercle (*cccc*) que tingui una diagonal de 8. El quadrat així aconseguit tindrà un àrea de 32 i el seu costat serà de $4\sqrt{2}$. En tercer lloc es dibuixa el quadrat circumscrit a la circumferència (*bbbb*) que tindrà un costat igual al diàmetre és a dir 8. El gràfic següent ens mostra la disposició d'aquestes figures.

.

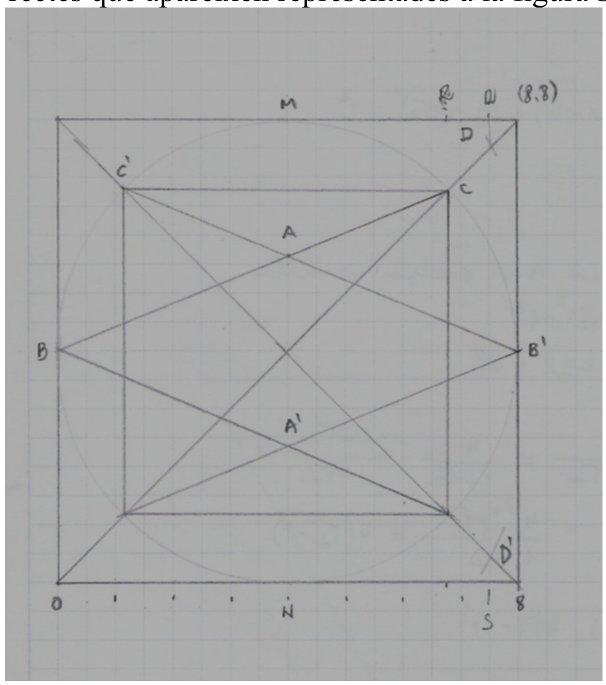


A continuació s'uneixen dos extrems (*cc*) del quadrat inscrit amb el punt mig (D) del costat (*bb*) del quadrat circumscrit obtenint un triangle isòsceles. Si es repeteix aquesta operació pels altres dos extrems dels quadrats s'obté un altre triangle idèntic. Tots dos triangles es tallen en dos punts de l'interior del quadrat inscrit. Amb centre en un d'aquest punts i radi el de la circumferència es poden determinar, sobre les diagonals comuns dels quadrats, els punts *d* que són els vèrtexs del quadrat que suposadament tindria la mateixa àrea que el cercle.

La construcció del manuscrit, reflectida en els plànols, és totalment gràfica i els resultats numèrics són determinats solament mitjançant la graduació de la línia central del dibuix, la qual esta dividida en 10 parts. A aquesta línia s'han superposat d'altres dividides en 4 parts i d'altres en 8 parts, totes elles disposades con si d'un nònius es tractés. Probablement d'aquesta manera l'autor va poder obtenir l'aproximació de $\pi = 3\frac{1}{8}$.

Però era realment aquest el valor de π aconseguit? Per poder-ho esbrinar hem obtingut analíticament el valor del costat del nou quadrat, d'aquell que segons M de A. M. tenia la mateixa àrea que el cercle.

Hem procedir situant uns eixos de coordenades d'origen l'extrem inferior esquerra del quadrat circumscrit al cercle i a partir d'aquí hem determinat les coordenades dels diferents punt i les equacions de diferents rectes que apareixen representades a la figura següent:



L'objectiu d'aquest càlcul és determinar la longitud de DD' que és el costat del quadrat solució del problema. Un cop trobat, es determinarà l'àrea del quadrat i dividint pel radi elevat al quadrat es podrà determinar el valor de π .

Per aconseguir això primer es va determinar les coordenades dels punts A= (4, 4$\sqrt{2}$) per la intersecció de les rectes BC i B'C' les equacions de les quals són respectivament:

$$2\sqrt{2}x - \left(4 + 2\sqrt{2}\right)y = -16 - 8\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}x + \left(4 + 2\sqrt{2}\right)y = 16 + 24\sqrt{2}$$

A continuació es va obtenir les coordenades del punt D

$$D = \left(2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2\sqrt{2} - 1}, 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right)$$

per intersecció de la circumferència de centre A i radi 4 amb la bisectriu del primer quadrant:

$$\left.\begin{array}{l} (x-4)^2 + \left(y - 4\sqrt{2}\right)^2 = 4^2 \\ x = y \end{array}\right\}$$

De manera anàloga es poden determinar les coordenades del punt D' que permetrà l'obtenció de la longitud del costat del quadrat

$$l = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2\sqrt{2} - 1} - 4$$

Aquest valor és el que permet afirmar que l'autor d'aquesta memòria estava treballant amb un valor de

$$\pi = \frac{\left(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2\sqrt{2} - 1} - 4\right)^2}{16} = 3{,}120193736$$

i no el de 3,125 que és el que el mateix autor dona per bo. Tanmateix, n'és conscient que el valor d'aquesta raó habitualment acceptada és un altra, però, convençut de la seva solució, creu que tal vegada hagin estat els matemàtics els que s'hagin equivocat:

> Es verdad que a la medida del círculo se le da 3,14159… hallada por medio del artificio geométrico de inscribir y circunscribir polígonos al círculo; pero en un cálculo tan extenso y complicado fácil es un error, a pesar de los profundos matemáticos que lo han calculado.

Aquesta actitud tan poc humil és una altra de les característiques dels quadradors i possiblement una de les que més indignarà als matemàtics.

13.2.5.- *Impugnación a la cuadratura del círculo resuelta por D. Leoncio Agües*. Memòria llegida per l'acadèmic Laur Clariana Ricart.

El 21 de gener de 1885, Laur Clariana va presentar una memòria a l'Acadèmia dedicada a el que ell denomina un escàndol matemàtic, la publicació d'un opuscle sobre la quadratura del cercle per Leonci Agües que segons diu li ha causat una impressió desagradable.

Clariana afirma que no és el primer cop que es troba amb un "desgraciat" com aquest que pretén resoldre una cosa que els cervells més privilegiats han provat que és impossible com Lambert o Lagrange. El mètode d'Agües és extravagant i arbitrari.

Clariana creu que Agües és molt agosarat per atrevir-se a presentar el seu treball a diverses acadèmies estrangeres i fins i tot a la de Madrid. La major part de les acadèmies no li responen i Agües, com a reacció, publica el seu resultat en un llibret.

Clariana recull algun dels seus errors. El primer és considerar que π és un valor racional 3,1625 i a continuació haver fet algunes simplificacions i errors que proven que no sap gaires matemàtiques. Així doncs confon l'àrea de l'hexàgon amb el seu semiperímetre i fa servir igualtat com aquesta:

$$\frac{Superficie}{4\sqrt{Superficie}} = \frac{1}{16} Superficie$$

Aquests errors i d'altres més porten a Clariana a escriure aquesta dura valoració:

> No obstante a pesar de estas nebulosidades, no dejan de aparecer de trecho en trecho algunos que otros puntos suficientemente luminosos para poner al descubierto la desnudez del Sr. Agües, dando pruebas fehacientes de su ignorancia aún en los rudimentos más sencillos del cálculo, hasta el punto de desconocer aquellas transformaciones que los jóvenes de segunda enseñanza aplican, antes de saber siquiera lo que representa la letra griega π , geométricamente, resultando, por fin, cambios de ecuaciones tan caprichosos y erróneos que son insuficientes todas las reglas de la Aritmética y del Álgebra para realizarlas

Durant 1884, el pare Pere Coma, professors del Col·legi de San Ignasi de Manresa va emetre un informe desfavorable a aquesta quadratura. Aquest informe, que no hem trobat, va ser llegit per Laur Clariana Ricart i per això comenta que:

> Inútil fuera ya proceder al examen de lo que sigue, máxime en el caso de haber párrafos tan nebulosos que justifican la contestación del Sr. Coma, cuando dice “Respondo que nada entiendo de todo eso; que todo es gratuito; que la hoja adjunta no prueba nada tal ecuación, que ni se sabe quien es la tal x. Por lo demás D, Leoncio, creo que convendría escribir menos y apretar más el argumento. Dispense V. si mi fallo no le es favorable; podrá ser que otro vea más lejos”.

Frase que resumeix tant l’opinió de Pere Coma com la de Laur Clariana i que es confirma a partir del moment que s’intenta analitzar amb una mica de detall el treball de quadratura d’Agües convertint aquesta tasca en absurda.

13.3.- Actitud dels quadradors

A continuació tornarem a analitzar els informes i memòries comentades abans però no des de l’àmbit de les matemàtiques sinó des del comportament humà. Cercarem les actituds i els comportaments dels científics i dels aficionats davant d’aquests problemes irresolubles.

13.3.1.- Agusti Canellas i el suposat geòmetra d’Oviedo

D. Pablo Vallaure, geòmetra de la cuitat d’Oviedo, presenta la memòria de la qual en fa un informe Agustí Canellas. No hi ha data però molt probablement correspongui al període 1804-1806 en que Canellas va ser professors de la càtedra de matemàtiques i cosmografia de l’Acadèmia.

L’actitud de Vallaure és de gran petulància que el porta a creure que la seva solució és exacta, rigorosa, infal·lible i incontrastable. Canellas ens ho descriu recollint fins i tot algunes expressions de l’autor:

> “Es tanta la satisfacción que manifiesta de la exactitud, y rigorismo de su razón del diámetro a la circunferencia, que al proponerla al examen y censura de los sabios, ya previene, «que ella es infalible, incontratable, y que no se la puede entrar por ningún lado, porque carece de toda repugnancia. Añade: No temo el que ningún geómetra del mundo, ni todos juntos puedan jamás levantarme la proposición, bien persuadido de que no cabe en ella poder engañarme; la cual osadía aun repito: que no cabe en ella poder engañarme». He copiado literalmente sus expresiones.”

Aquesta actitud porta a Vallaure a qualificar d’ignorants aquells que no acceptin la seva solució, entre els quals hi eren tots els geòmetres als quals els l’havia presentada i que unànimement l’havien rebutjada. L’arrogància de Vallaure motiva a Canellas a suggerir a l’Acadèmia que no doni cap resposta:

> “La tenacidad misma con que sostiene ser una verdad incontrastable su descubrimiento de la cuadratura del círculo, nos dispensa de manifestarle nuestro sentir; pues en caso de ser exacta, no lo sería más por nuestra aprobación; y si la reprobamos, como es preciso, graduará de partos de la ignorancia nuestras objeciones, como lo ha hecho con cuántos movidos del celo de la verdad, han querido desengañarle de su preocupación.”

A Vallaure el mou com a objectiu que la seva solució sigui autoritzada i aprovada per un cos científic.

El document que analitza Canellas, que no hem trobat, té una presentació parcial i poc acurada:

> "El escrito que remite, no viene ordenado en forma de discurso, ni presentan sus partes conexión alguna."

Es possible que Vallaure tingués una certa reticència a presentar de manera oberta el seus treballs i es va guardar per a ell algunes parts importants de la demostració, com ens explica el mateix Canellas:

> "Pide se le apruebe la razón de 20:63, que señala del diámetro a la circunferencia, sin darnos demostración alguna; si solo nos propone varias citas de la demostración que supone tener guardada en su escritorio"

No obstant, Vallaure no amaga la seva identitat com altres quadradors.

La reacció de Canellas va ser la d'aconsellar a l'Acadèmia que no respongui a la petició per raó de l'autosuficiència de Vallaure.

> "no convenía al decoro de la Real Academia el contestar en su nombre el mencionado geómetra"

No obstant això, elabora un estudi detallat per contradir la solució, cosa que fa pensar que, si més no, li va merèixer interès dedicar-se a analitzar la no veracitat de la resposta.

13.3.2. Armet i la relació entre quadratura i artilleria

Al 1815 va anar a parar a les mans de Pere Martir Armet una memòria sobre la quadratura del cercle elaborada per algú que no hem pogut identificar, però que la va dedicar a una persona rellevant del regne. Armet va analitzar aquest escrit en un informe que no hem trobat i va concloure que no era correcte la solució a la quadratura proposada. Aquesta conclusió li va permetre elaborar l'informe de refutació que va enviar a Francesc Sanponts. Aquest va redactar un altre informe i el va presentar a l'Acadèmia en el que elogiava la feina d'Armet i el proposava com a Acadèmic. En aquest informe, que és la única referència que tenim d'aquest treball, és l'únic que es conserva. Comparat amb els altres treballs de quadratura presentats a l'Acadèmia, sols aquest remet el problema de la quadratura del cercle a un problema de artilleria.

> "Construir un saco de metralla que su base sea capaz de seis balas. Coloca en primer lugar la figura geométrica en que se funda este problema describiendo un círculo mayor que encierra exactamente siete círculos menores, y después de haber formado un hexágono inscrito en el círculo mayor apoyando sus lados en la circunferencia de este, por medio de la prolongación de uno de los radios oblicuos que se hace secante, forma un triángulo por medio de otra secante que dirige desde el punto de concurrencia de estas dos líneas hasta el punto de contacto del radio oblicuo inmediato del mismo hexágono; y que constituye el tercer lado del triángulo".

L'escassa informació de que disposem no ens permet donar dades sobre l'actitud del quadrador ni aprofundir ni en la manera com va resoldre el problema ni en què se sostenia la refutació. Només sabem que era presentat com un problema pràctic d'ús en artilleria.

13.3.3. La memòria lliurada pel Marquès de Llupià

El Marquès de Llupià va lliurar a Joan Gerard Fochs un quadern escrit per un italià, Caetano Marchetti Tomassi, on suposadament es resolia la quadratura. No es conserva aquest quadern sinó només l'informe que Fochs va fer després d'analitzar-lo i que va retornar a l'esmentat Marquès.

Aquest informe no porta data però creiem que correspon al període en què Fochs exercia com a professors d'una de les càtedres de matemàtiques de l'Acadèmia 1806-1822.

No tenim cap dada sobre l'actitud del quadrador ja que tot sembla indicar que no va intervenir directament sinó a través del Marquès de Llupià. Si que podem afirmar que, pel que diu Fochs, l'autor no era massa clar en la seva exposició i no esmentava la procedència d'alguns dels teoremes de geometria que utilitzava.

> "Nunca aprobaré que en una demostración cuya figura sea complicada se callen las proposiciones de Geometría en que se funde, pues por más familiar que esta se tenga, a veces por un solo axioma no se da al blanco, y en consecuencia el entendimiento se abruma y la Geometría se arredra y desanima para seguir el hilo de la demostración."

Tampoc sabem si l'autor estava interessat en rebre alguna mena de premi o reconeixement pel seu treball de quadratura. En canvi si que hi ha un comentari de Fochs sobre aquesta qüestió que deixa entreveure que si realment s'aconseguís una solució, l'autor seria mereixedor de premis i reconeixements.

> "A fe Señor Marqués, que si esto fuese cierto, sin duda el Sr. Tomassi debería reportar el premio tan debido a tanto mérito; pero no es así"

En una nota prèvia, Fochs explica que li ha costat arribar a la conclusió que la demostració de la quadratura era falsa i que ho havia comentat amb algun alumne seu per tal de ratificar les seves conclusions.

> "No admire V. que se hayan pasado todos estos días sin haberle vuelto el cuaderno italiano sobre la cuadratura del círculo, pues la oscuridad que ofrece el no citar el autor de las proposiciones de Geometría en que funda su demostración, especialmente en una complicación de líneas que hay en sus figuras, lo largo y engorroso de los cálculos que resultan para la comprobación de los del cuaderno; me han internado en analizarlo todo con la debida escrupulosidad, y me parece haberlo apurado, hallando falsa la pretendida Cuadratura: hoy he llamado a un Discípulo muy diestro en el cálculo para que compruebe los que yo he hecho a fin de asegurarme si me he equivocado, que no lo creo

El fet que esmenti un deixeble és una prova més que Fochs exercia com a professors a l'Acadèmia. No sabem qui era aquest deixeble perquè no tenim dades de la relació d'alumnes que Fochs va tenir a les seves classes. Solament disposem de les dades de dos exàmens públics realitzats per Fochs el 1818 i 1820. En el primer hi van participar quatre alumnes un dels quals va tractar sobre la quadratura del cercle es tractava de Marià Enrich. Entre els altres participants hi havia Josep Alegret que més tard també va fer de professor de matemàtiques a l'Acadèmia.[15] A l'examen de 1820 no hi ha cap referència a la quadratura sinó que es va dedicar una atenció especial a les còniques.

[15] Els alumnes eren: Narcís Albrador, Josep Alegret, Llorenç Via, Salvador Ros i Renart.

13.3.4. L'informe de la Junta de Comerç

El 20 de setembre de 1846, un tal M d'A M, que es presentava com autor de l'obra *Tesoro de geometría*, va lliurar a la Junta de Comerç un text on anunciava que no era impossible, com fins el moment es creia:

> la formación cuadrada del área de la superficie circular, así como el conocimiento exacto de la longitud de la línea de la circunferencia y que la dificultad consistía solamente en conocer los medios para conseguirlo.

Es a dir creia no solament haver quadrat el cercle sinó també haver obtingut la rectificació de la circumferència. Àrea i longitud que depenen totes dues del nombre π. L'autor afirmava que per aconseguir aquests resultats li havia calgut recórrer a la seva imaginació i a una altra via més sòlida i certa que les que fins aleshores es feien servir:

> Mis indagaciones y las demostraciones que de aquellas se originan, se fundan pues, en otros principios más certeros y geométricos de los que son debidos a las figuras rectilíneas (polígonos inscritos y circunscritos) y no puedo menos de confesar, que durante el curso de mis investigaciones he sido más feliz de lo que podía imaginar

Aquesta satisfacció personal que diu haver obtingut en realitzar les seves recerques no era la única que esperava aconseguir ja que, l'autor manifestava el seu dret als premis i honors que deia que havien ofert públicament algunes institucions científiques i alguns governs:

> Considerándome con derecho a obtener los premios y honores ofrecidos públicamente, tanto por varias academias y corporaciones científicas, como por algunos gobiernos, al que resolviese satisfactoriamente el arduo **problema** de la **cuadratura del círculo**, me reservo para explanar cuanto sea del caso la demostración de las demás partes en que divido mi obra, así como el uso que mejor me parezca hacer de ella, según el mérito que le sea reconocido; así es que la corporación que más ventajas y garantías me ofrezca me dará lugar a tener el honor de presentarle y manifestarle todos mis trabajos con cuantas aclaraciones y razonamientos sean del caso para su más perfecta y pronta inteligencia.

Val a dir que aquest error era comú a altres quadradors ja que no hi ha cap constància de cap acadèmia ni de cap govern que n'hagi atorgat premi algun ni hagi establert cap concurs per la solució del problema de la quadratura. De vegades s'havia arribat a confondre aquest problema amb el de les longituds en el mar, el qual si va ser objecte de premis i concursos públics (JACOB, 2006).

L'autor, que com hem vist amaga la seva identitat, tampoc mostra lliurement el seu mètode sinó que es reserva algunes parts de la demostració per mostrar-les a aquella institució que li atorgui més avantatges. Anuncia, això si, que quan faci la demostració el resultat serà tan clar que ho entendran no sols els intel·ligents sinó els menys iniciats en aquesta matèria.

La resposta de la Junta de Comerç, institució que no era un cos científic però que sostenia amb els seus recursos unes escoles de formació, va consistir en passar-ho a la Comissió d'Escoles i aquesta als dos professors que impartien matemàtiques: Onofre Jaume Novellas, que era catedràtic de matemàtiques, i Francesc Claret, que impartia l'aritmètica i geometria pràctica a la càtedra de càlcul i escriptura doble. La finalitat que la Junta pretenia era: "oir el parecer de V.

a cerca del interés que merezcan en su acreditada inteligencia”.[16] La resposta dels dos professors fou clara i contundent:

> 1ª. Que el problema, un día famoso, de la cuadratura del círculo, ha perdido su interés e importancia, después que se ha llegado a demostrar matemáticamente que es inconmensurable la relación del diámetro a la circunferencia, sobre cuyo dato estriba, y que en consecuencia es una pretensión quimérica el decir que se ha cuadrado un círculo con exactitud.
>
> 2ª Que íntimamente convencida de lo mismo la Academia de ciencias de París tiene determinado, mucho tiempo ha, no atender ni escuchar proyecto alguno que tenga por objeto la investigación exacta de dicha cuadratura.
>
> 3ª Que siendo real y positivo lo dicho en las dos reflexiones precedentes, sería extraño y aun ridículo pensar que ningún gobierno ni corporación hubiese ofrecido premios ni honores al que resolviese exactamente el problema de dicha cuadratura; así es que tal programa de premios solo se funda al parecer en una voz vaga, en un rumor popular, hijo, según creen los informantes, de una mala inteligencia.
>
> 4ª. Que aun haciendo abstracción de todo lo dicho, no pueden los infrascritos informar del mérito e interés que tenga la obra presentada a V.S.; por cuanto no se han remitido por su autor D. M. de A. M. ni los cálculos ni los argumentos en que apoya tal vez sus pretensiones.[17]

Els quatre punts de la resposta posen de manifest que, tant Novellas com Claret eren conscients que el problema era irresoluble i que molt probablement sabien que el 1761 Lambert havia provat la irracionalitat de π i que a conseqüència d’això el problema havia perdut interès. Tant era així que l’Académie de Sciences de París no atenia aquesta mena de treballs. Els professors de la Junta de Comerç sabien que cap govern atorgava premis per aquesta qüestió i que la creença era més aviat un rumor popular fill de la mala intel·ligència. Tanmateix, afirmen no haver pogut analitzar l’obra perquè l’autor no els la estat enviada, probablement perquè estava a l’espera de la millor oferta, o sigui del millor postor.

El 15 de gener de 1849, l’autor d’aquest treball va tornar a enviar a la Junta de Comerç el text de la demostració de la quadratura acompanyada de cinc làmines que complementaven el seu treball. No tenim cap constància que arribés a les mans de Novellas i encara que hagués estat així és molt probable que no hagués pogut donar resposta ja que al maig d’aquell any va caure malalt i a l’agost es va morir.

13.3.5. Els acadèmics reaccionen

Dues són les publicacions realitzades per Leonci Agües sobre la quadratura: *La cuadratura del círculo*[18], publicada el 1884 i *Relación de la circunferencia al diámetro*[19] relligada al final de la revista el *Porvenir de la Industria* de 1883. En aquesta darrera publicació Agües justifica haver presentat el text a les acadèmies científiques i haver-ne fet una publicació per donar a conèixer el seu descobriment i així recollir l’opinió de les persones que en saben. Aquesta

---

[16] El 21 d’octubre de 1846 la Junta de Comerç acorda de passar el projecte de M de A. M a la comissió d’escoles. El 6 de novembre de 1846, la comissió d’escoles passa aquest text a Onofre Novellas i Francesc Claret. Lligall 101, 1, 507-508. Arxiu de la Junta de Comerç.

[17] Porta data de 21 de desembre de 1846 i està signat per Onofre Jaime Novellas i Francisco Claret. Lligall 101,1, 509-510. Arxiu de la Junta de Comerç.

[18] AGÜES, Leoncio, (1884) *La cuadratura del círculo.* Barcelona: Tipografía La Academia.

[19] AGÜES, Leoncio (1885?) *Relación de la circunferencia al círculo.* Barcelona: Establecimiento tipográfico de los sucesores de Narciso Ramirez y Cia.

referència ens indica que la publicació no és de 1883 sinó probablement de 1884 o posterior, ja que aquest any és el de la data de la primera publicació.

Agües explica que feia anys que estava cercant la resolució de la quadratura i que arran d'això va obtenir un valor de π de 3,1625. A l'octubre de 1881, ja convençut de la veracitat de la descoberta, va tractar infructuosament que una comissió científica emetés un dictamen. Des d'aleshores ha fet diverses gestions per fer-se sentir: "y las puertas de las Academias han estado cerradas para mi". Finalment, cansat de no ser escoltat, durant 1884, es va adreçar a un matemàtic i professors del Col·legi de San Ignasi de Manresa, el pare Pere Coma, el qual el va atendre i li va retornar amb un informe desfavorable. Com a conseqüència d'aquesta decepció, Agües va optar per enviar aquest text a la Reial Acadèmia de Ciències Exactes, Físiques i Naturals de Madrid. Hi va haver, però un fet que el va fer decidir-se. Es va assabentar que un tal Vilella, director del Col·legi de Sant Albert de Madrid, havia dipositat en aquesta Acadèmia una resolució de la quadratura que creia també vertadera i que aquella institució li havia acceptat el text per a poder-lo estudiar. Davant la possibilitat de perdre de prioritat, Agües es va afanyar a presentar la seva peculiar quadratura tot fent-se la pregunta:

> ¿Por qué habiéndolo yo antes solicitado no se me ha oído a mi primero y se admite ahora el pliego del señor Vilella?

La presentació d'aquesta memòria a l'Acadèmia de Madrid, i també a la de Berlín, i no a la de Barcelona, juntament amb la publicació dels resultat són els fets que més vas irritar a Laur Clariana i el van conduir a llegir la memòria sobre aquest tema en una sessió de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona. A més si bé la resposta de l'Acadèmia de Berlín era prou discreta ja que li recorda que no feien dictàmens sobre quadratura, en canvi la de Madrid fou més tèrbola i molt menys contundent. Es tractava d'una resposta bastant suau i conciliadora fins el punt d'elogiar-li el treball tot i reconèixer que no aconseguia la quadratura. Aquesta resposta, Clariana la va considerar intolerable i va fer una proposta davant aquesta mena de treballs:

> ¿Cuan útil seria, señores, que se revistiera a las academias científicas de cierta inmunidad para esta clase de trabajos, prohibiendo de una manera terminante que persona alguna sin título que garantizara su saber se permitiera el dar a luz ningún libro ni mucho menos atreverse a remitir a los académicos extranjeros cualquier trabajo sin el dictamen favorable de las respectivas academias españolas¡

L'informe de l'Acadèmia de Madrid està en la línia d'un altre informe que havia estat elaborat per Eduardo Saavedra, que era enginyer de camins i arquitecte i el seu vice-president, i en el qual es deixava clar que de moment no podien prendre cap decisió sols analitzar tots els treballs del que anomena "turba de quadradors" i això si, rebutjar les que presentaven solucions racionals o basades en una simple arrel quadrada.[20] Tanmateix, ni Saavedra, ni Clariana eren coneixedors que Lindemann ja havia provat la transcendència del nombre π.

[20] LUSA MONFORTE, G. (1995) "Laur Clariana i Ricart. L'assimilació de la Matemàtica del segle XIX". Dins: CAMARASA, J-M-; ROCA ROSELL, A. *Ciencia i tècnica als Països Catalans. Una aproximació biogràfica als darrers 150 anys.* 548.

13.3.6.- Debat a la premsa

El 4 de novembre de 1897, l'Acadèmia va acordar de manera formal no acceptar cap treball de quadratura més:

> "Igualmente fueron aprobados los dictámenes emitidos por la Comisión permanente de matemáticos que se agregó al académico perteneciente a la de Astronomía y Geodesia Sr. Domenech y Estapá acerca de unos problemas geométricos publicados por D. Leandro de San Germán y de la obra publicada por D. Jose Fola e Igúrbide titulada «La Nueva Ciencia Geométrica»."
>
> A propuesta de la misma comisión quedó acordado que, al igual que han establecido otras academias, no se admitan en lo sucesivo para su informe todos aquellos trabajos que, como los relativos a la determinación exacta de π, movimiento continuo y demás análogas, se refieran a problemas declarados insolubles por la Ciencia siendo por tanto inútiles cuantos esfuerzos intelectuales a los mismos se dediquen. Confiose la ejecución de este acuerdo a la Presidencia, dejando a su discreción el consultar o no en cada caso las Comisiones permanentes a quienes pudiera competer el asunto".[21]

Aquesta decisió venia motivada per la publicació de dos treballs. Un de Leandro de San German sobre la trisecció de l'angle[22] i l'altre, l'obra titulada *Nueva Ciencia Geométrica* de José Fola Igúrbide que tractava entre moltes altres coses de la quadratura del cercle. L'Acadèmia justificava aquest acord fent referència a les actuacions similars dutes a terme per d'altres institucions científiques. No obstant això, aquesta decisió es prenia massa tard, ja que es portava a terme 122 anys després que l'Académie de Sciences acordés una cosa similar i quinze anys després que Lindemann provés la transcendència de π i en conseqüència la impossibilitat de quadrar el cercle. Si amb això es pretenia preservar l'Acadèmia de la polèmica es pot afirmar que es va aconseguir només en certa mesura, ja que el debat va saltar del si de la institució científica a la premsa i contribuir a popularitzar el problema.

Tot això va començar quan José Fola (? -1.904), un autor teatral reconegut i a més aficionat a les matemàtiques, va enviar la seva obra a l'Acadèmia per a demanar la seva aprovació. Inicialment, el silenci per resposta va ser l'actitud dels acadèmics més combatius com Laur Clariana i Josep Domènech i Estapà emparant-se, potser, en la decisió de l'Acadèmia. No obstant això, la incorporació a la polèmica d'Eduard Llanas (1843-1904), escolapi i professor de matemàtiques, els va forçar a intervenir. Això va succeir arran de l'aparició d'un article al Diari de Barcelona en el qual es cantaven les excel·lències de l'obra de Fola.[23]

En aquest article Eduard Llanas presentava l'obra de Fola com un projecte ambiciós i original de matemàtiques que anava més enllà de la geometria ensenyada fins aquell moment ja que el seu autor pretenia escriure quatre volums dels quals només havia aparegut el primer que estava dedicat a la geometria del cercle. La seva originalitat consistia a considerar que el

---

[21] Acta del 4 de noviembre de 1897 *Libro de Actas de Juntas Generales. 29 de diciembre1890 - 29 de marzo de 1898.* Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona. 465.

[22] SAN GERMAN, L. (1897).

[23] VIÑAS RIERA, Joan (1987: 145). BERNALTE, A.; LLOMBART, J. (1992). José Fola Igúrbide (?- 1918) había publicado en 1886 un drama en tres actos titulado *Teresa* y en 1895 la comedia *El mundo que nace* que se estreno en el teatro El dorado de Barcelona el 12 de junio de 1895. Posteriormente publicó y estrenó diversas obras teatrales. No sabemos de donde procedía su interés por las matemáticas pero puede que se debiera a influencia de su hermano Apolinar, capitán de carabineros oriundo de Soria pero afincado en Valencia y muy aficionado a las matemáticas, tanto que llegó a ser Académico de la Real Academia de Ciencias Exactas y Naturales de Madrid. El otro participante en la polémica, el padre escolapio Eduardo Llanas (1843-1904), tenía formación científica y había sido director del Real Colegio de San Antón y del Colegio de Guanabaca en Cuba.

problema de la incommensurabilitat residia en què el sistema de numeració no era l'adequat, per a això Fola definia unes noves categories de mesura que li conduïen a la resolució no només de la quadratura sinó també de la trisecció.[24]

L'elogi de Llanas va ser replicat al dia següent per l'acadèmic Josep Domènech i Estapà (1858-1904), que era catedràtic de Geometria Descriptiva de la Universitat de Barcelona, amb el propòsit d'alertar a la premsa de l'error.[25]

Els termes de la rèplica es van centrar en la nova unitat de mesura anomenada categoria crítica (o també unitat cúbica o unitat octogonal) que curiosament també era incommensurable i degut a això s'obtenia un valor de π diferent del que utilitzava les matemàtiques des de l'època de Arquimedes. De fet el llibre de Fola pretenia quadrar el cercle amb aquesta nova unitat de mesura construïda a partir d'un quadrat de costat 4 i d'àrea 16 on s'havia inscrit un cercle. La unitat cúbica era el quadrat de costat la meitat de la diferència entre la diagonal del quadrat circumscrit al cercle i el seu costat. És a dir:

$$\left(\frac{4\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 = 0{,}6862915...$$

Amb això obtenia l'àrea d'aquest cercle com C=16-5·unitat cúbica = 12,56854249 cosa que conduïa a un valor de π=3,14213562.

La contrarèplica no es va fer esperar ja que el mateix Fola la va remetre al *Diario de Barcelona* i a *La Publicidad* amb l'argument que Domènech no s'havia llegit la seva obra perquè no volia entrar de ple en el seu contingut.[26] Durant el mes d'octubre de 1897 la polèmica es va traslladar a un altre diari menys conservador *La Vanguardia* on un considerable nombre d'articles van centrar el debat en termes científics però van elevar també el to de les acusacions amb atacs i desqualificacions personals. Així, els acadèmics sostenien que els quadradors eren personatges aliens a les matemàtiques i sense títol que certifiqués seus coneixements. Per això en un dels articles van reclamar la intervenció d'algun coneixedor d'aquesta disciplina.[27] Eduard Llanas es va sentir al·ludit i va intervenir en el debat amb una posició clara a favor de José Fola trencant els esquemes dels acadèmics. Algú que no era un illetrat en matemàtiques es convertía en defensor d'aquest treball. Llanas justificava la seva posició en termes de poca sensibilitat i de certa prepotència com indica el paràgraf següent:

> "a un autor que ha consagrado vigilias interminables a la confección de su obra, que se ha impuesto privaciones penosísimas para impulsar el progreso de la ciencia, que después de haber vivido algunos años en voluntario encierro y consumidos ya todos sus recursos de continuación, al fin presenta al público el producto de sus penosísimas tareas, persuadido de que el sacrificio que ha hecho será provechosísimo para sus semejantes, a ese autor, según mi doctrina no se le recibe con desdén bochornoso: se le acoge con benevolencia; se examina su obra, y habiendo en ella algo de bueno, se le aplaude, se le estimula, y se señala al público lo que debe utilizar de la obra presentada y lo que debe pasar por alto. Esta ha sido mi conducta respecto a la obra del señor Fola. Y esta es la razón por la cual hoy, contestando a la objeciones

[24] *Diario de Barcelona* 5 de octubre de 1897, 11530-11532.
[25] *Diario de Barcelona* 6 de octubre de 1897, 11573.
[26] *Diario de Barcelona* 8 de octubre de 1897, p. 11662-11663. También en *La Publicidad* 7 de octubre de 1897, 3.
[27] *La Vanguardia* 13 de octubre de 1897, 5; 15 de octubre de 1897, 4; 16 de octubre de 1897, 4; 19 de octubre de 1897, 4; 20 de octubre de 1897, 4.

> del señor Doménech y Estapá me presento en su artículo publicado en la Vanguardia del 15, desciendo al palenque a que he sido provocado".[28]

Això no vol dir que Llanas no estigués d'acord amb Fola sinó tot el contrari com es demostra en l'estens article publicat al mateix diari en els dies següents on Llanas detalla la quadratura tan convençut d'ella com si ell fos el seu autor.[29] En els dies successius els atacs van arribar a la ironia i al sarcasme tant de quadradors com d'acadèmics i aquests últims van optar, aparentment per retirar-se del debat.[30] Però, quan semblava el tema tancat una nova intervenció de Clariana al *Diario Mercantil* va tornar a revifar la polèmica en la qual va intervenir també un altre acadèmic Miguel Marzal Bertomeu (1842-1916), que era catedràtic d'anàlisi matemàtica de la Universitat de Barcelona, per provar alguns dels errors de la quadratura de Fola.[31]

Aquest debat posa de manifest que el punt central va ser precisament el valor de π i la impossibilitat de quadrar el cercle per raó de la irracionalitat d'aquest nombre i no de la seva transcendència. El recurs a la història va ser utilitzat com un argument fonamental pels acadèmics per a la defensa del valor de π utilitzat tradicionalment, encara que també van buscar de localitzar sense descans els errors de l'aproximació de Fola, en molts casos amb gran encert. No obstant això, en cap cas van citar a Lindemann ni a la transcendència d'aquest nombre cosa que els hagués servit per donar per tancada la polèmica de manera més eficaç.[32]

13.4.- Descripció de les memòries de trisecció

Si bé el problema de la quadratura va generar molta literatura procedent no sols de matemàtics sinó també dels que hem denominat quadradors, la trisecció, en canvi és un problema que en va generar menys en època posterior a la Grècia Clàssica. Tanmateix, hi trobem diversos exemples. A la Barcelona del segle XIX i principis del segle XX hi trobem alguns exemples dignes d'estudi. El primer és de la meitat del segle, 1863, i es deu a un acadèmic, Baltasar Cardona que va presentar una memòria titulada *Ensayos elementales sobre la trisección de un arco.* Uns anys més tard Leandro de San Germán va fer un recull de problemes i fórmules que va publicar finalment entre 1892 i 1898 on estudiava la trisecció de l'angle de 60º. Aquest darrer treball que va presentar a l'Acadèmia fou rebutjat.

L'obra de José Fola Igúrbide *La Nueva Ciencia Geométrica* que va passar totalment desapercebuda per la trisecció resolia va ser objecte d'anàlisi a principi del nou segle per un capità d'enginyers a la *Revista Tecnológico Industrial*.

Finalment, uns anys més tard, ja en el segle XX, Jeroni Anyé Casanova va presentar a l'acadèmia un opuscle titulat *Trisección del Ángulo Rectilineo, su teoria y resolución.* La resposta de l'Acadèmia va ser clara i contundent: les resolucions de problemes d'aquest tipus no eren acceptades en aquesta institució. Analitzaren a continuació cada un d'aquests casos amb detall i després analitzarem la tipologia i actituds dels trisecadors.

---

[28] *La Vanguardia* 21 de octubre de 1897, 4.
[29] *La Vanguardia* 22 de octubre de 1897, 4-5; 24 de octubre de 1897, 4.
[30] *La Vanguardia* 24 de octubre de 1897, 4; 26 de octubre de 1897, p. 4.
[31] *Diario Mercantil*, 1 de noviembre de 1897, 1; 8 de noviembre de 1897, 3.
[32] LUSA MONFORTE, G. (1995:549).

13.4.1.- La memòria de Baltasar Cardona

La solució a trisecció de l'angle proposada per Cardona es basa en procediments bastant clàssics:

> "Dos son los que principalmente he seguido.
> **Primero:** Combinando una curva comenzando por la circunferencia de círculo con la del arco propuesto.
> **Segundo:** Combinando una recta con la circunferencia de que el arco forma parte."

El primer cas es parteix d'un arc o d'un angle ABC que suposa ja dividit en tres parts iguals i intenta descobrir les coordenades d'un dels punts que el triseca. El procediment és bàsicament experimental, parteix de la corda AC d'un arc i triseca la seva meitat de manera que el punt obtingut que està més a prop del punt mig serà el que també trisecarà el segment sencer. Aleshores repeteix la operació per diferents arcs que tinguin la mateixa corda anterior cosa que li permet determinar la línia corba que uneixi els punt que trisequen els diferents arcs i obté una hipèrbola. Es tracta d'un procediment similar al que empra Pappos a la seva Col·lecció Matemàtica.

La segona solució a la trisecció de l'angle presentada per Baltasar Cardona no requereix més que una circumferència i una recta però per poder-la resoldre cal inserir un segment cosa que col·loca aquest procediment en el mateix grup que els procediments utilitzats pels grecs i coneguts sota el nom de neuseis (inserció). De tots aquest mètodes se sabia que no es podien realitzar amb els instruments euclidians. La proposta de Cardona s'assembla molt a la que apareix en una obra d'Arquímedes, el *Liber Assumptorum.*

Es tracta de traçar una secant per un extrem de l'arc que es vol trisecar i inserir entre la part externa de l'arc i la prolongació del diàmetre un segment igual al radi de l'arc. Aleshores la porció de l'arc interceptat serà una tercera part del tot ell.

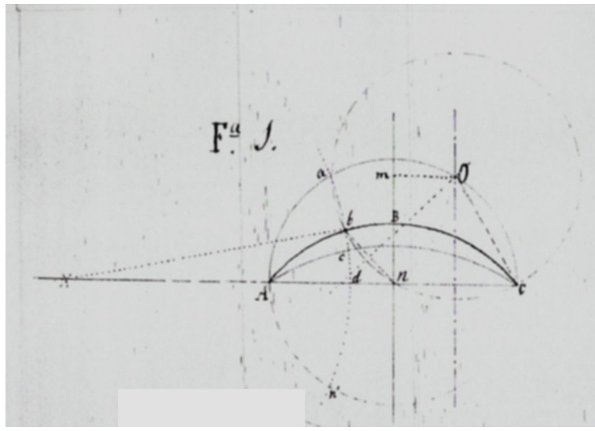
Conseqüentment, les dues solucions presentades no aconsegueixen trisecar l'angle amb només regla i compàs sinó que fan recurs a còniques o a la inserció, dos procediments força coneguts a l'antiguitat clàssica. Tanmateix, el treball de Cardona té interès bàsicament perquè posa de manifest un mètode de treball eminentment heurístic poc habitual en matemàtiques on se solen trobar les demostracions ja acabades i on no es deixa veure com s'ha arribat a aquest resultat.

Tot seguit exposarem els detalls de la trisecció en els dos casos abordats per Cardona. Així doncs, en primer lloc, comença per presentar el problema que resoldrà amb les còniques, però indica que en un primer moment creia que el podria resoldre amb solament unes rectes i uns cercles:

> **Primero.** F1ª
>
> Sea el ángulo ABC o su arco AC si se le supone dividido en tres partes iguales y se traza la circunferencia O, se notará el trapecio COmn de bases conocidas pero cuya altura no he podido determinar en función del radio y cuerda del arco como convendría puesto que no resulta ser verdad como a primera vista parece que esta altura sea tanto mayor cuanto lo sea el radio del arco en una misma cuerda, sino que se halla que en ciertos arcos se verifica una especie de retroceso del centro de la circunferencia secante.
>
> La serie de puntos de intersección obtenidos en estos diferentes ensayos me hicieron variar de camino por presentárseme en forma de un arco de círculo n', a, b, c, d, que pasando por la tercera parte de

> la semicuerda y por la respectiva del cuadrante cortaba a cualquiera de los demás arcos en su tercera parte respectiva.

Aquesta presentació va acompanyada per la figura següent:



En ella es pot veure el segment AC trisecat per *d* i els respectius arcs trisecats respectivament per *a*, *b* i *c*. L'arc corresponent al punt *a* correspon a mitja circumferència de centre *n*. Encara que no ho digui, el punt O és el simètric d'*a.* Per O traça un cercle que passi per C i n que li permet construir un trapezi la base menor del qual i la seva altura són respectivament les coordenades *x* i *y* del punt O d'intersecció de l'arc. El cas singular de l'arc de 180º no planteja cap problema i permet determinar, encara que l'autor no ho digui, aquestes dues coordenades en funció del radi R = *n*C del cercle i també el valor de la semicorda.

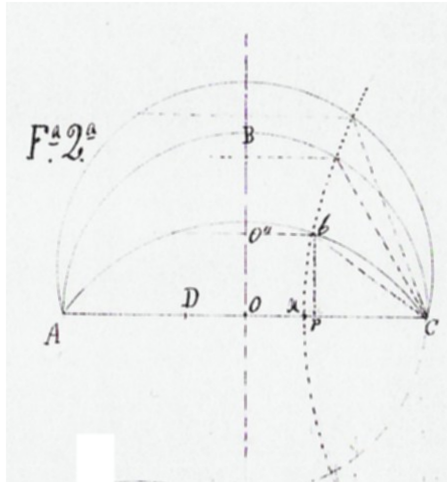
$$x = \frac{R}{2} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

El problema es complica quan l'arc ja no és de 180º és a dir per als altre punts *b* i *c* del dibuix dels quals Cardona se n'adona que no hi ha proporcionalitat entre el radi de la circumferència i l'alçada del trapezi.

Per això fa diferents assaigs per a diferents arcs i radis per tal de confirmar la seva idea inicial que la corba que trisecava era un cercle. Però, en no ser-ho, es veu obligat a determinar de quin tipus de corba es tracta, com ell mateix explica a la memòria:

> "Apliqué por consiguiente esta idea a diferentes arcos de un radio de 1 a 3 decímetros y en todos ellos he obtenido bastante exactitud gráficamente hablando; más al pasar a arcos mayores que la semicircunferencia y al trazar de generalizar la cuestión por los procedimientos algebraicos se halla que no solo aquella curva no es un arco de círculo sino que ni puede ser parte de curva alguna cerrada."

La figura següent que inclou resulta bastant clarificadora ja que no solament el condueix a determinar que es tracta d'una hipèrbola.



Sinó que també el porta a afirmar que els punts d'intersecció *a*, *b*, *c*, d són tals que la distància a la mediatriu de la corda és la meitat que la distància al vèrtex.

> "Tiene todos sus puntos de manera que cada uno dista de la bisectriz una cantidad doble que del extremo respectivo de la cuerda o arco, de suerte que Oa: aC :: 1: 2; o'b: bc::1: 2; etc. Esta curva ha de ser pues abierta y simétrica en el sentido de la cuerda."

Amb aquestes dades passa a determinar l'equació d'aquesta corba.[33]

> "Sea O el origen de las coordenadas cp la ordenada de un punto b de la curva que le llamaremos y y Op la abscisa x del mismo punto, y a la semicuerda Oc le llamaremos p, sentado lo cual tendremos la ecuación. y^2= Cb^2-pC^2= (2bO" $)^2$- (p-Op$)^2$ = $4x^2$- (p-x$)^2$ de donde y^2= 4x – p^2+2px-x^2 ó bien y^2=$3x^2$+2px – p^2."

En primer lloc fixa l'origen de coordenades en O y designa la semicorda OC=*p* de manera que les coordenades del punt *b* que triseca l'arc seran respectivament *x* = OP i *y*= bP. Establertes aquestes referències aplica Pitàgores al triangle PbC per a determinar Pb.

$$y^2 = \overline{Cb}^2 - \overline{PC}^2 = (2bO'')^2 - (p - OP)^2 = \overline{2x}^2 - (p - x)^2 = 4x^2 - p^2 + 2px - x^2$$

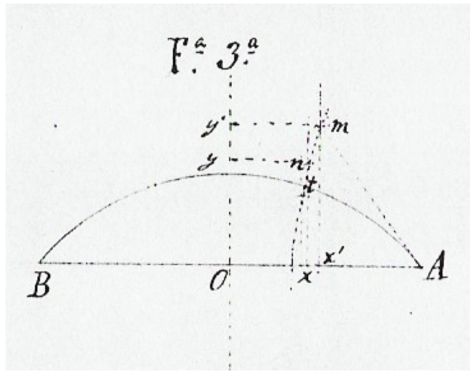
On resulta que la corba que permet trisecar tots els arcs és $y^2 = 3x^2 + 2px - p^2$ és a dir una hipèrbola.

Per a facilitar la construcció d'aquesta hipèrbola, Cardona proporciona un mètode gràfic que permet construir a punts aquesta hipèrbola:

> "Mas en la práctica sería muy trabajoso el tener que verificar la determinación y construcción de esta rama de hipérbola para obtener el tercio de un arco propuesto, por lo que he escogido otro medio puramente elemental que sin necesidad de conocer la hipérbola dé la misma curva; tal es, a partir del centro de la cuerda tómense sobre de esta varias abscisas y levantando sus ordenadas, córtese cada una de estas desde el extremo del arco con un radio igual a un doble abscisa respectiva y la curva así obtenida será la rama de la hipérbola correspondiente."

[33] El text manuscrit presentat per Cardona pot generar algunes confusions perquè de vegades no distingeix prou minúscules i majúscules. Tot i això hem volgut ser fidels el text original tot i córrer risc de confondre al lector.

La figura següent mostra com traçant diferents abscisses a partir de O, i per a cada una d'elles l'arc de centre A de radi doble de la longitud de l'abscissa determinarem els successius punts de la hipèrbola.



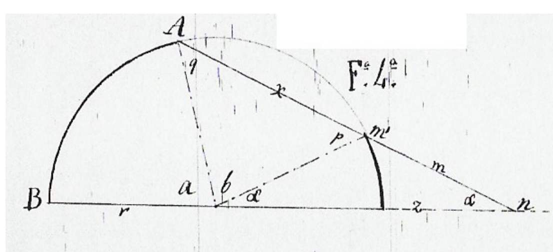
Després d'aquesta primera solució, Cardona es proposa abordar una altra i per això passa a analitzar el segon procediment relatiu a la trisecció:

¡Segunda combinación

La de una recta con la circunferencia del arco propuesto F. 4ª

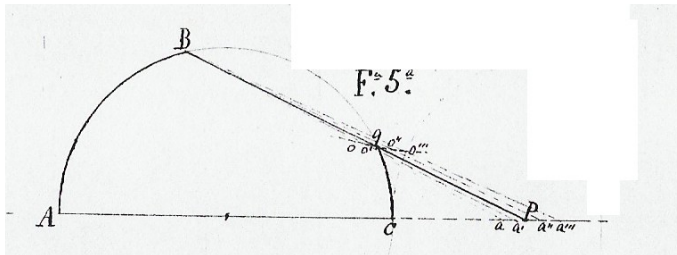
Tirando por el extremo del arco una secante cuya parte externa entre la circunferencia completa y el diámetro que pasa por el otro extremo sea igual al radio, la porción de arco interceptado es $\frac{1}{3}$ del propuesto. Fundado en esto puede dividirse en tres partes iguales; un arco hasta $\frac{3}{4}\pi$ al pasar de este límite ya no se verifica pero puede recurrirse a dividir primeramente el arco en dos partes iguales si es de $\frac{3}{4}\pi$ a y en cuatro si pasa de 3 cuadrantes.

Cardona també proporciona una solució si l'angle és superior a dos o tres rectes. La figura següent dona la construcció:



Coneixedor possiblement que els únics problemes resolubles amb regle i compàs són els de segon grau, Cardona constata la dificultat constructiva d'aquest procediment amb regle i compàs ja que afirma que tant l'equació de la secant com el triangle que es forma donen lloc a equacions indeterminades de segon grau que en tractar de reduir-les a determinades donen lloc a equacions de quart grau, evidentment irresoluble amb les eines euclidianes.

"La dificultad está en la colocación geométrica de dicha secante pues su ecuación por la teoría de las secantes es $(x+m)^2 = (2r+z)\ z$. Y atendiendo simplemente al triángulo rectángulo que resulta es $(x+m)^2 = (z+2r - a)^2+b^2$. Una y otra indeterminadas de 2º grado que al tratar de reducirlas a determinadas por cualquiera institución se convierten en de 4º."



Per facilitar la construcció proporciona un procediment iteratiu que resum en la figura 5 que consisteix en dur el radi sobre la prolongació del diàmetre Ca'''. Amb centre a''' i aquesta distància es traça un arc. Cada un dels punts d'aquest arc esta a la distància desitjada del punt a''', Si desplacen el segment o''' a''' paral·lel a ell mateix fins que talli a la prolongació del diàmetre i a l'arc ens permetrà determinar el punt q de manera que Cq serà la tercera part de l'arc AB.

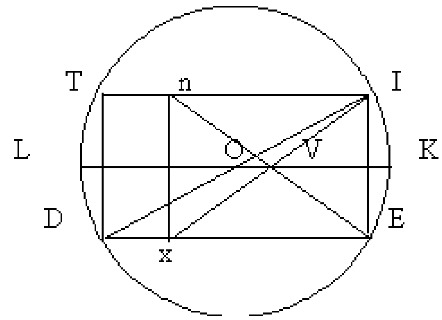
13.4.2.- Les triseccions de San German

Les dades biogràfiques de Leandro de San German són escasses. Sabem que va néixer a Barcelona el 1832 i que quan tenia 25 anys es va matricular a la Universitat de Barcelona d'una assignatura solta de Física amb el professor Antoni Rave. En un dels seus llibres ens explica que precisament va ser l'assistència en aquesta classe que el va incitar a estudiar aquest problema i que el seu interès s'incrementava a mesura que li sorgien dificultats. Tanmateix, el fet d'aconseguir el 1861 algunes triseccions particulars com la de 90º o 180º el va animar a continuar. Més tard, al 1888 va fer un recull de problemes i fórmules que també va publicar i finalment entre 1892 i 1898 va dedicar-se a estudiar la trisecció de l'angle de 60º. Aquest darrer treball que va presentar a l'Acadèmia fou rebutjat com els anterior. Pero això no el va fer desistir de continuar malgrat moltes calamitats que va patir. Ell mateix confessa que l'estudi de la trisecció li va servir de refugi, de consol i de distracció

Un dels treballs que va provocar que el 4 de novembre de 1897 la Real Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona acordés de manera formal no admetre cap treball sobre quadratura o sobre altres problemes considerats irresolubles va ser la *División Exacta de Circunferencia y Arcos particulares sin tanteo* de Leandre de San German i Malet.

En aquesta obra San German no presenta una solució general sinó una de concreta de trisecció dels angles de 60º i 120º.

De fet el que fa és construir amb regle i compàs un angle de 20º i un altre de 40º



En síntesi la construcció parteix d'una recta qualsevol EI, arc d'una circumferència en la que es construeix dos triangles equilàters EIV i nVX. A continuació es tracen les rectes Ex i In i es prolonguen fins que tallen la circumferència en D i T respectivament. Així obtenim un paral·lelogram TDIE en el que si es tracen les diagonals TE i ID i el diàmetre LK s'obtenen respectivament sobre el centre O els angles EOI = DOT = 40º i el de DOL = LOT= 20º que són respectivament el terç de 120º i de 60º.

Aquesta construcció permet a San German la construcció de l'eneagono i l'octodecàgon portant al centre d'una circumferència l'angle de 40º i de 20º respectivament nou i divuit vegades.

San German és conscient que la trisecció amb regla i compàs sols és possible en alguns casos particulars i en cita uns quants tots ells angles la mesura dels quals és múltiple de 3. Aquesta peculiaritat específica del problema de la trisecció sembla ser un indicatiu —segons San German— que hi ha encara esperances de trobar una solució general.

> "Con este procedimiento, sirviéndonos sólo de la regla y el compás, quedan vencidas las dificultades que impedían que los ángulos indicados pudieran trisecarse, pues que con él se obtienen al mismo tiempo, la extensión del lado o radio, la medida de su arco y su cuerda a libre elección.
>
> Estas soluciones en forma de problemas, vienen planteadas desde la más remota antigüedad y sólo podían obtenerse por medio de ecuaciones de tercer grado, fuera del alcance de la geometría elemental".

San German coneixia que la resolució comportava una equació de tercer grau però això no li semblava cap obstacle per a creure que el problema podia ser resolt amb regle i compàs. Això indica que la comprensió de la seva naturalesa era correcta però els mancava conèixer els treballs de Wantzel, encara un desconegut entre els trisecadors i potser els acadèmics d'aquells anys.

13.4.3.-La corba de Fola

L'obra de José Fola Igúrbide *La Nueva Ciencia Geométrica* va generar un gran escàndol per la suposada resolució de la quadratura però va passar totalment desapercebuda per la trisecció que també resolia. No va ser fins a principi del nou segle que va sortir a la llum gràcies a un treball, avui perdut, que va realitzar un capità d'enginyers, Pompeu Martí, i del que tenim notícies gràcies a la *Revista Tecnológico Industrial* en la qual algú que signa amb les inicials de J.S. va escriure un breu article on tractava de la corba Fola.

> "la curva en cuestión que el autor supone inventada por el Sr. Fola no es más que la cuadratriz de

Dinostrato que este geómetra ideó con un objetivo análogo.”

La corba de Fola no era, doncs, cap novetat ja que s’havia emprat alguns segles abans pel mateix propòsit. No obstant, la seva aplicació per a trisecar l’angle continuava sent un recurs alié a les eines euclidianes.

13.4.4.- La trisecció de Jeroni Anyé

Finalment, uns anys més tard, ja en el segle XX, un altre personatge, no acadèmic va presentar novament un treball que havia publicat sobre la trisecció de l’angle. Es tractava de Jeroni Anyé Casanova, capità de la marina mercant i professor nàutica encara que no de l’Escola de Nàutica de Barcelona on no va ser ni alumne. Anyé havia publicat l’opuscle *Trisección del Ángulo Rectilineo su teoria y resolución*[34] que el 28 d’agost de 1911 va enviar a l’Acadèmia amb la intenció que aquesta l’analitzés i si ho considerava adient el recomanés.

> "Cábeme el honor de enviar separadamente por correo a esa respetable Academia, mi opúsculo titulado *Trisección del Ángulo rectilíneo en tres partes iguales*, cuyo problema creo estaba pendiente de solución. Al dirigirme a esa competente Academia es para suplicarle se sirva examinar detenidamente mi modesto trabajo; y si después de ello considera ser un hecho la deseada Trisección sería para mi la más preciada recompensa, ver publicada y recomendada mi solución por esa Academia, que es la que creo preferentemente autorizada para fiscalizar los trabajos de esta índole”. [35]

En el pròleg Ayné posa de manifest que no desconeixia els treballs sobre la irresolubilitat, però que no se’ls creia i en canvi se sentia escollit per a dur a terme ell la solució a la trisecció. La resposta de l’Acadèmia va ser clara i contundent: les resolucions de problemes d’aquest tipus no eren acceptades en aquesta institució.

> “Dada cuenta a la Comisión general Directiva en sesión de 28 del próximo pasado de la solicitud de V., que acompaño el impreso sobre la trisección del ángulo rectilíneo, pidiendo informe acerca del mismo, acordó manifestarle que no puede darse curso a su instancia por impedirlo un acuerdo dictado anteriormente por la misma Junta para casos análogos”.[36]

L’anàlisi dels mètodes de trisecció presentats per Anyé mostra que l’autor recorre a regles graduats i a estris similars al tomahawk. Les resolucions es basen en la famosa neuseis, inserir segments d’una dimensió determinada, com ja s’havia fet des de l’època clàssica.

13.5.- Actitud dels trisecadors

Davant del problema de la trisecció l’actitud dels acadèmics va ser menys clara que amb la quadratura i per be que inicialment van manenentir-se en silenci i noes van pronunciar en la presentació d’una memòria per un acadèmic, aviat van reaccionar barrant el pas a aquest tipus de treballs.

[34] ANYÉ CASANOVAS, Gerónimo (1911) *Trisección del Ángulo Rectilineo su teoria y resolución.* Vilasar de Mar: Impremta Collet.
[35] Dictamen sobre la trisecció de l’angle, 161, 4. Arxiu RACAB
[36] Dictamen sobre la trisecció de l’angle *Op. Cit.*

13.5.1.- Silenci dels acadèmics

El cas de la memòria de la trisecció presentada per Baltasar Cardona a l'Acadèmia te alguns factors que la fan singulars i que la diferencien dels casos de la quadratura. Cal insistir que el 1863 ja estava provada la impossibilitat de resoldre aquest problema amb regla i compàs. Uns trenta anys abans, Pierre Wantzel va provar que amb regla i compàs sols es podien resoldre aquells problemes que tenien una solució quadràtica, i consegüentment la trisecció que és un problema de tercer grau no admetia solució amb aquestes eines euclidianes. Al 1837 aquest resultat havia aparegut publicat en el Journal de Liouville[37] Aquesta era una de les revistes a les que estava subscrita l'Acadèmia. A més, entre les activitats més profitoses que feia aquesta institució hi havia les sessions on es comentaven extractes de revistes estrangeres. Aquestes reunions servien perquè algun membre d'alguna secció donés a conèixer als altres acadèmics els progressos i les noves tendències de la recerca en els països més avançats d'Europa. Al 1858, ja es feien a l'Acadèmia unes vuit sessions d'aquest tipus i a partir de 1864 es va reduir el seu nombre a només tres o quatre. Tot i aquesta activitat, la troballa de Wantzel va passar desapercebuda.

Baltasar Cardona i Escarrabill, havia nascut a Manresa el 1828 i s'havia format inicialment al Seminari Conciliar de Vic on havia estudiat llatinitat i humanitats i els tres cursos de filosofia entre 1844 i 1847, més tard, a Barcelona va seguir dos curs del batxiller en filosofia en el Col·legi dels Srs. Carreras que estava adscrit a l'Institut provincial de segon ensenyament. Tots aquests estudis li van servir per convalidar tot el batxiller en filosofia el 1856 i per accedir al batxiller en Ciències que va aconseguir el 1860 després de dos anys d'estudis a la Universitat de Barcelona. Un cop obtingut el grau de batxiller en ciències, Cardona es va proposar assolir la llicenciatura. Aquest grau consistia, aleshores, en només un curs acadèmic on s'havia de cursar sols dues assignatures: el càlcul diferencial i integral de diferències i variacions i la geometria descriptiva amb treballs gràfics. Per això es va matricular d'aquestes matèries el curs 1860-1861 però, possiblement degut a una afecció greu que el va privar de sortir de casa durant un temps o per altres raons personals, finalment va optar per no concloure els estudis.[38] No obstant, el grau de batxiller en ciències el va facultar per a ser professors de primer i de segon ensenyament. També assolí la formació de mestre d'obres i d'agrimensor.[39]

El 16 d'abril de 1862 va ser escollit acadèmic de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona amb destinació a la Secció de ciències fisicomatemàtiques. Al més següent va llegir la memòria d'entrada que duia el títol: *Lenguaje matemático. Planteo de problemas*. De 1862 a 1867 va ser escollit secretari d'aquesta secció i al 1865 va ser triat per formar part de la Comissió de correcció d'estil. Al 1866 va fer-se càrrec interinament de la càtedra de Matemàtiques per malaltia del titular, aleshores Ferran Rodríguez de Alcantara i Deops.[40] El 20 de novembre de 1863 va llegir de torn la memòria titulada: *Ensayos elementales sobre la trisección de un arco*, la qual és objecte d'estudi en aquesta treball.

[37] *Journal de Mathematiques pures et appliquées, ou recueill mensuel des Memoires sur les diverses parties des Mathematiques*
[38] *Expedient personal* Arxiu Universitat de Barcelona.
[39] ELIES DE MOLINS, 1889.
[40] Nómina del personal académico. 1912-1913. RACAB.

Durant aquests anys era propietari d'un col·legi de segon ensenyament[41] que estava agregat a l'Institut provincial de Barcelona, en aquest centre impartia entre altres disciplines la geometria descriptiva sobre la qual va elaborar un programa[42] i un tractat en dos volums, en el pròleg del qual esmentava que aquesta activitat docent era la que li ocupa la major part del dia[43].

El 10 de juny de 1868, Cardona va enviar una carta al President de l'Acadèmia en la qual s'excusava de no poder participar en les activitats d'aquesta institució per trobar-se greument malalt:

> "La terrible enfermedad que me aqueja de más de un año a esta parte, me ha privado de asistir, en el actual año académico, a las sesiones de esa respetable Corporación.
>
> No he dado antes parte de ello porque de sesión en sesión he ido esperando ocasión de poder asistir, pero no me ha sido posible.
>
> En consecuencia he pensado suplicar a V.S. que en cuanto sea compatible con los estatutos de esa Academia y relativamente a los efectos a que pudiera dar lugar la no asistencia se tenga en cuenta la fatal causa que lo ha motivado bien independiente por cierto de mi voluntad y buenos deseos." [44]

Un més després d'aquesta carta, el 21 de juliol de 1868, Baltasar Cardona va morir a l'edat de 40 anys.

Com veien a la seva biografia, Cardona no era una persona aliena al mon de les matemàtiques ja que havia estudiar el batxiller en ciències que era el nivell universitari, que en aquests anys, possibilitava la docència d'aquesta disciplina. Tot i no conèixer la impossibilitat provada per Wantzel, la seva actitud davant el problema de la trisecció és d'extrema prudència.

Al principi de la memòria de la trisecció, Cardona compara la ciència a un edifici de construcció, aquest símil li permet afirmar que a les matemàtiques hi ha qüestions irresolubles com el moviment continu o la quadratura del cercle i d'altres —diu Cardona— que semblen de possible solució com la resolució general d'equacions o la trisecció de l'angle.

> "En la ciencia matemática vemos comprobado este aserto, ella nos demuestra la imposibilidad del movimiento continuo y de la cuadratura del círculo, mientras que todo lo establecido se presta a medida que se va adelantando en apoyo de la resolución general de las ecuaciones, de la trisección del ángulo y de otras que no es necesario enumerar; y como la elección entre aquellas cuya imposibilidad está demostrada y aquellas que en nada implican contradicción no es dudosa he elegido para traer aquí hoy una de estas tal es la de la trisección del ángulo."

La frase de Baltasar Cardona es prou ambigua com perquè no quedi prou clar si aquest matemàtic estava convençut de la possibilitat de resolució de la trisecció de l'angle amb regle i compàs a la manera euclidiana o es plantejava presentar una solució amb el recurs a altres formes no vàlides amb les eines clàssiques.

> "Al emprender el estudio de esta cuestión no me propuse directamente el resolverla ya que hombres muy versados en la materia no la han hasta aquí logrado, y solo fue un objeto el ver que clase de dificultades se presentan en ella y estudiarlas.

[41] "Colegio de 2ª enseñanza de D. Baltasar Cadona" situat al pasatge Madoz, 4 de Barcelona.

[42] CARDONA, B. (1866) *Programa de geometría descriptiva y de sus principales aplicaciones.* Barcelona: Establecimiento Tipográfico de Jaime Jepús.

[43] "A cuyo efecto y ocupado en la enseñanza de esta y otras asignaturas nos encontramos la mayor parte del día en nuestra Escuela sita en…" CARDONA, B. (1865) *Tratado de geometría descriptiva y de sus principales aplicaciones.* Barcelona: Establecimiento Tipográfico de Jaime Jepús. 2 vol., p. XII.

[44] Expedient personal. Arxiu RACAB.

No es tampoco, pues, hoy mi objeto el presentar la cuestión resuelta sino el de exponer simplemente los tanteos que he verificado, las dificultades que he hallado y los resultados que he obtenido.

Varios y distinguidos matemáticos se han ocupado de esta cuestión importante, más difícil por cierto de lo que a primera vista parece y todos en general, a lo menos por lo que he visto la han tratado por procedimientos superiores.

No se extrañará por consiguiente el que yo me haya propuesto tantearla por otros puramente elementales."

La prudència com ho presenta fa pensar que era conscient de les dificultats i per això no parla de solució sinó de tempteigs ja que havia comprovat que tots els matemàtics que havien estudiat la trisecció ho havien fet pel que anomenaven "procediments superiors" que, pensem que, es refereix als procediments no ortodoxes. No obstant això ell tria els procediments elementals, que es deu tractar dels mètodes que utilitzen rectes i circumferències, tot i que en cap moment fa referència a que només utilitzarà el regle i el compàs. Hem de tenir present que entre tots els mètodes de trisecció emprats a la matemàtica grega, Cardona cita aquells que més similituds tenen a una possible solució euclidiana.

No hi ha doncs en Cardona, ni actituds arrogants ni amenaces, hi ha humilitat i, en tot cas desconeixement de l'estat més recent de la qüestió. Tampoc hi trobem en Cardona un desig d'aconseguir premis ni compensacions, sols el mou la presentació del resultat dels seus treballs i la voluntat de fer avançar la ciència.

13.5.2.- L'Acadèmia per fi reacciona

Uns anys més tard, ja en el segle XX, un altre personatge, no acadèmic va presentar novament un treball que havia publicat sobre la trisecció de l'angle. Es tractava de Jeroni Anyé Casanova, capità de la marina mercant i professor de l'Escola de Nàutica de Barcelona, el qual havia publicat l'opuscle *Trisección del Ángulo Rectilineo su teoria y resolución*[45]

El 28 d'agost de 1911, Anyé va enviar l'opuscle a l'Acadèmia amb la intenció que aquesta institució l'analitzés i si ho considerava adient el recomanés.

> Cábeme el honor de enviar separadamente por correo a esa respetable Academia, mi opúsculo titulado "Trisección del Ángulo rectilíneo en tres partes iguales, cuyo problema creo estaba pendiente de solución. Al dirigirme a esa competente Academia es para suplicarle se sirva examinar detenidamente mi modesto trabajo; y si después de ello considera ser un hecho la deseada Trisección sería para mi la más preciada recompensa, ver publicada y recomendada mi solución por esa Academia, que es la que creo preferentemente autorizada para fiscalizar los trabajos de esta índole.[46]

En el pròleg d'aquest opuscle es pot palesar l'actitud d'Anyé que com es pot veure és molt diferent de la de Cardona. D'entrada, Ayné esmenta com a problemes no resolts la quadratura del cercle, la trisecció de l'angle, la duplicació del cub i el moviment continu i comenta que fins i tot hi ha hagut alguns matemàtics que els han considerat irresolubles. Això vol dir que Ayné no desconeixia els treballs sobre la irresolubilitat, sinó que no se'ls creia i en canvi se sentia escollit per a dur a terme ell la solució a la trisecció:

---

[45] ANYÉ CASANOVAS, Gerónimo (1911) *Trisección del Ángulo Rectilineo su teoria y resolución.* Vilasar de Mar: Impremta Collet.

[46] Dictamen sobre la trisecció de l'angle, 161, 4. Arxiu RACAB

"Al fijarme por primera vez en la trisección del ángulo, esto es: dividir un ángulo rectilíneo en tres partes iguales por medio de un procedimiento gráfico y sin más ayuda que la regla y el compás, tuve un presentimiento de que su solución era posible y destinada a mi. Desde entonces se apoderó de mi mente aquella idea, acompañándome por doquiera, lo cual fue motivo para que, con una constancia superior a mis fuerzas, me dedicara por completo al estudio de dicho problema" [47]

L'actitud de l'Acadèmia també havia canviat. Si a mitjans del segle XIX podia acceptar que un acadèmic presentés una memòria sobre la trisecció a principis del segle XIX ja havia decidit que problemes d'aquest tipus no eren acceptat en aquesta institució. Per això, la resposta que va donar a Anyé al desembre d'aquell any va ser la següent:

Dada cuenta a la Comisión general Directiva en sesión de 28 del próximo pasado de la solicitud de V., que acompaño el impreso sobre la trisección del ángulo rectilíneo, pidiendo informe acerca del mismo, acordó manifestarle que no puede darse curso a su instancia por impedirlo un acuerdo dictado anteriormente por la misma Junta para casos análogos.[48]

Aquesta nova actitud era més semblant a les que prenien altres institucions científiques europees des de feia alguns anys.

13.6.- Conclusió

Els treballs sobre la quadratura i la trisecció que involucraren directa o indirectament la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona posen de manifest un problema que plana en tots ells: La difusió de les descobertes científiques. Abans de finals del segle XIX hi ha tres troballes fonamentals que afecten a la resolubilitat dels tres problemes especials de la matemàtica grega. Dues afecten al nombre π i de retruc a la quadratura: la prova de la irracionalitat que va tenir lloc el 1761 i la de la transcendència el 1882. L'altra, afecta més directament a la trisecció i la duplicació. És la demostració del grau, algebraicament parlant, que podien tenir els problemes per poder ser resolts amb regla i compàs.

El desconeixement dels treballs de Lambert entre els acadèmics barcelonins a principis del segle XIX va portar com a conseqüència els dictàmens de Canellas i l'informe de Fochs. La ignorància dels treballs de Lindemann, a la fi del segle, va ocasionar la impugnació de Clariana i tota la polèmica en la premsa pel cas del llibre de José Fola. En canvi, el coneixement de la irracionalitat de π a mitjans del segle, va comportar la resposta de Novellas i de Claret en la qual queda evidenciat que es tenia notícia de les actuacions de l'Acadèmia de Ciències de París en casos similars i que l'agafaven com a referència. La posició adoptada a finals del segle per l'Acadèmia de Ciències de Barcelona de no admetre cap treball relatiu a aquests problemes té molt a veure amb la influència de la institució homòloga francesa tot i que amb un retràs de mes d'un segle.

Ara bé, en el cas de la quadratura hi havia desconeixement de les descobertes més recents però la resposta de l'Acadèmia va ser en tot moment correcta. En el cas de la trisecció la situació va resultar molt més peculiar ja que hi va haver un acadèmic que va presenta una memòria de trisecció, uns trenta anys després dels treballs de Wantzel, i no va rebre cap rèplica, ni cap

[47] (ANYÉ, 1911: 1)
[48] Dictamen sobre la trisecció de l'angle *Op. Cit.*

crítica.

La poca difusió de troballes, com la de Wantzel, es pot deure entre d'altre factors, a qüestions intrínseques del propi autor. Wantzel va morir molt jove i sols va publicar un article sobre aquesta temàtica. També es pot deure a la poca difusió del medi on es fa la publicació. Wantzel ho publica en el *Journal de Mathematiques* de Liouville, revista a la que l'Acadèmia de Ciències de Barcelona no se subscriu fins uns trenta anys després que l'article veiés la llum. Un darrer factor pot ser l'aïllament del lloc receptor. En el moment de la troballa, l'Acadèmia acabava tot just de sortir d'un període de clausura i totes les energies es centraren en recompondre les activitats i en la docència per tal de facilitar la prompta restauració de la Universitat.

La naturalesa del problema de la trisecció també és un altre factor a tenir en compte perquè ni els aficionats ni els acadèmics perdessin l'esperança que finalment podria ser resolta la trisecció amb les eines euclidianes. El cas de la memòria de Cardona n'és l'exemple més clar ja que no sols ell sinó tots els altres acadèmics que l'escoltaren no reaccionaren en contra.

Finalment la quadratura va ser l'espurna que va portar l'Acadèmia a no admetre cap treball d'aquest tipus inclosa la trisecció i, arran d'això, quedaren al marge tots els altres treballs posteriors que són pocs pel que fa a la quadratura però uns quants més respecte a la trisecció.

14.- BIBLIOGRAFIA

AGÜES, Leoncio (1885), *Relación de la circunferencia al círculo,* Barcelona, Establecimiento tipográfico de los sucesores de Narciso Ramírez y Cia.

AGÜES, Leoncio, (1884), *La cuadratura del círculo,* Barcelona, Tipografía La Academia.

ALLMAN, George (1889). *Greek geometry from Thales to Euclid*. Kessinger Publishing, 2005.

ANYÉ CASANOVAS, Gerónimo (1911), *Trisección del ángulo rectilíneo. Su teoría y resolución,* Vilasar de Mar, Imprenta Collet.

ARCHIMEDE (1960), *Les Oeuvres Complètes d'Archimède,* Liège, Vaillant-Carmanne.

ARCHIMEDES (1910-1913), *Archimedes Opera Omnia,* Leipzig, Heiberg.

AUROUX, Denis (2000), *Tas d'oranges, cristaux et empilements de sphères*, CNRS, École Polytechnique. A :http://www-math.mit.edu/~auroux/papers/beaubourg-notes.pdf.

BACHOC, Christine (2003), *Cercles et sphères*. A :http://www.math.u-bordeaux.fr/~bachoc/Mathenjean.pdf.

BAKER, A. (1979), *Transcendental number theory,* Cambridge, University press.

BARCA SALOM, F. X. (2005) *Onofre Jaume Novellas i Alavau (Torelló,1787 - Barcelona,1849) Matemàtiques i Astronomia Durant La Revolució Liberal.* Col·loquis d'Història de la Ciència i de la Tècnica núm 4. Barcelona: SCHCT, 2005

BARCA SALOM, F. X. (2006), "La actitud de cuadradores y académicos en Barcelona durante el siglo XIX", *Arbor* núm. 718, 219-236.

BARCA SALOM, Francesc X. "Completar la formació en Matemàtiques". Dins: BARCA SALOM, Francesc X. et al. (coord) *Fàbrica, taller i laboratori. La Junta de Comerç de Barcelona: Ciència i tècnica per a la indústria i el comerç (1769-1851)* Barcelona: Cambra de Comerç, 2009.

BARCA SALOM, Francesc X. "Quadratura i trisecció a la Barcelona vuitcentista". *Actes d'Historia de la Ciència i de la Tècnica.* Núm.1 (2) 2008. 167-179.

BARCA SALOM, Francesc X. "Un matemàtic i astrònom torellonenc: Onofre Jaume Novellas i Alavau (1787-1849)" *AUSA*. Vol. XXIV, núm. 163, 2010, 127-149.

BARCA SALOM, Francesc X. PONT ESTRADERA, Maria. "Perfeccionar el comerç". Dins BARCA SALOM, Francesc X. et al. (coord) *Fàbrica, taller i laboratori. La Junta de Comerç de Barcelona: Ciència i tècnica per a la indústria i el comerç (1769-1851)* Barcelona: Cambra de Comerç, 2009.

BARCA SALOM, Francesc.X i LUSA MONTFORTE, Guillermo (2010) "Ensenyament de les Matemàtiques: recepció de noves tendències". Dins: VERNET, Joan i PARÉS, Ramon. *La ciència en la història dels Països Catalans. Volum: 3 : De l'inici de la industrialització a l'època actual*. Publicacions de la Universitat de València, Institut d'Estudis Catalans. 355-396.

BARCA Francesc, LUSA Guillermo (ed) (1997). *Història de la ciència: els tres problemes especials de la geometria grega* Barcelona : UPC, Facultat de Matemàtiques i Estadística.

BARRIOS GARCÍA, José; PRIETO RODRÍGUEZ, Ramón (1991) “Los problemas especiales: la duplicación del cubo. *Historia de la Geometría Griega.* Actas del I Seminario “Orotava” de Historia de la Ciencia. Canarias: Consejeria de Cultura, 373-391.

BERNAL, John (1967) *Historia social de la ciencia.* Barcelona: Península.

BERNALTE, A.; LLOMBART, J. (1992), “Els matemàtics professionals barcelonins en una polèmica sobre la quadratura del cercle (1897)”. A: Camarasa, J. et. al., *Actes de les I Trobades d’Història de la Ciència i de la Tècnica*. Barcelona, Societat Catalana d’Història de la Ciència i de la Tècnica, 223-234.

BOURRIOT, F. (1975) *El trabajo en el mundo helénico.* Barcelona; Grijalbo.

BORTOLOTTI, E (1932), “La propagation de la science a travers les siecles”. Scientia 1932(2), 133-146.

BOYER, C.B. (1986) *Historia de la matemática.* Madrid: AU. Textos.

BOYER, C.B. (1959). *The History of the Calculus an dits Conceptual Development.* New York: Dover

BROCHARD. V. (1966) Etudes de Philosophie Ancienne et de Philosophie Moderne. Paris: J. Vrin.

CAJORI, Florian (1993). *A history of mathematical notations.* New York: Dover.

CARATIN, Roger (2002) *Les mathématiciens de Babylone*. Presses de la Renaissance.

CHARON, J. (1969) *Cosmología: Teorías sobre el universo.* Madrid: Guadarrama, 19-38.

CLAGETT, Marshall (1981) *La Scienza della meccanica nel medioevo*. Milan: Feltrinelli.

CLAGETT, Marshall (1992) *Ancient Egypt science: a source book.* Phyladelphia: American Philosophical Society.

COHEN, I. Bernard (1989) *El Nacimiento de una nueva física.* Versión española de Manuel Sellés García. Madrid : Alianza, AU 609.

COLERUS Egmont (1972-1973). *Breve historia de las matemáticas.* Madrid: Doncel.

CROMBIE, A.C. *Historia de la ciencia de San Agustín a Galileo/1. Siglos V a XIII.* Madrid: Alianza Universidad núm. 76.

CUOMO, S. (2000) *Pappos of Alexandria and the mathematics of late antiquity.* Cambridge: University Press.

DECORPS-FOULQUIER, Micheline (2000) *Recherches sur les Coniques d’Apollonios de Pergé et leur commentateurs grecs.* París: Klincksiek.

DEMARTHON, Fabrice (1998), *Kepler avait raison*. A: http://www.infoscience.fr/articles/.

DREYER, J.L.E. (1980) *Storia dell’Astronomia de Talete a Keplero.*Milan: Feltrinelli.

DOU, Albert (1970) *Fundamentos de la Matemática.* Barcelona: Labor.

DURAN A. J. (1996) *Historia, con personaje, de los conceptos del Cálculo.* Madrid: Alianza Editorial, 801.

EDWARDS, C..H. (1979) *The historical development of the Calculus.*New York: Springer.

EGGERS LAN, Conrado (1995). *El Nacimiento de la matemática en Grecia.* Buenos Aires: Eudeba, 1995

ELENA, Alberto (1989) *A hombros de gigantes: estudios sobre la Primera Revolución Científica* Madrid : Alianza, AU 586.

ELIAS DE MOLINS, Antonio (1889), *Diccionario biográfico y bibliográfico de escritores y artistas catalanes del siglo XIX.* Barcelona.

ENRIQUES Federico (1954). *Los Elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna: libros I-IV*. Madrid: C.S.I.C,Instituto Jorge Juan.

EVES, H. (1983) *An Introduction to the History of Mathematics.* New York: C.B.S. College.Pub.

FARRINGTON, B. (1979) *Ciencia Griega*. Barcelona: Icaria.

FARRINGTON, B. (1974) *Ciencia y filosofía en la antigüedad.* Barcelona: Ariel.

FETTWEIS. Edwald (1931) "Faits parallèles dans le domaine mathématique chez des peuples primitifs vivant actuellement et chez des peuples civilisés des temps passés". *Scientia* 1931(1), 187-198.

FINLEY, M. I. (1983) *El legado de Grecia.* Barcelona: Grijalbo.

FOLA IGÚRBIDE, José (1897), *La Nueva Ciencia Geométrica,* Barcelona, J. Romá.

FOWLER D.H. (1999) *The Mathematics of Plato's Academy: a new reconstruction*. Oxford: Clarendon Press.

GARCÍA BACCA Juan David (1968). *Textos clásicos para la historia de las ciencias*. Caracas: Universidad Central de Venezuela, Facultad de Humanidades y Educación, Instituto de Filosofía.

GARCÍA OVEJERO, Ana; DELGADO MARANTE, Ana (1971) Euclides: "Los Elementos. Teoría ae las paralelas. Método de Exhaución", *Historia de la Geometría Griega.* Actas del I Seminario "Orotava" de Historia de la Ciencia. Canarias: Consejeria de Cultura, 274-318.

GARELLI, Paul; SAUNERON, Serge (1974) *El trabajo en los primeros estados.* Barcelona: Grijalbo.

GARMA PONS, S.; Lusa Monforte, G. (1995), "Laur Clariana i Ricart. L'assimilació de la Matemàtica del segle XIX". A: Camarasa, J.M.; Roca Rosell, A. (1995): *Ciència i tècnica als Països Catalans. Una aproximació biogràfica als darrers 150 anys*. Barcelona, Fundació Catalana per a la Recerca, 523-564.

GILLE, Bertrand (1985) *La cultura técnica en Grecia.* Barcelona: Juan Garnica.

GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. (1993) *Arquímedes: el método relativo a los teoremas mecánicos.* Barcelona: Publicaciones UAB i Ediciones UPC.

HALES, Thomas C.(2005), “A proof of the Kepler conjecture”, *Annals of Mathematics*, 162 (2005) 1065-1185.

HALL, A. Rupert (1985) *La Revolución científica, 1500-1750.* Barcelona: Crítica,116-222.

HANSON, Norwood Rusell (1985) *Constelaciones y conjeturas.* Madrid: Alianza Editorial.

HEATH T.L. (1956) *The Thirteen Books of Eucli's Elements.* New York: Dover.

HEATH, Thomas L. (1981). *A History of Greek Mathematics.* New York: Dover.

HOBSON, E.W. (1969), *Squaring the Circle,* Cambridge, University Press.

HODGKIN, Luke Howard (2005). *A History of mathematics: from Mesopotamia to modernity*. New York: Oxford University Press, cop.

J.S. (1900), “La curva de Fola - Estudio y aplicaciones geométricas de esta curva por D. Pompeyo Martí; capitán de ingenieros”, *Revista Tecnológico Industrial*, 245-247.

JACOB, Marie (2005), “Interdire la quadrature du cercle à l'Académie: une décision autoritaire des lumières?”, *Revue d'histoire des mathématiques,* 11, 89-139.

JACOB, Marie (2006) *La quadrature du cercle. Un probleme à la mesure des Lumières.* Poitiers, Fayard.

JESSEPH, Douglas M. (1999), *Squaring the Circle. The War between Hobbes and Wallis.* Chicago, University Press.

JONES, A.; MORRIS, S.A.; PEARSON, K.R. (1992), *Abstract Algebra and Famous Impossibilities,* New York, Spring-Verlag.

KIRK, G. S. Y RAVEN, J. E. (2008). *Los Filósofos presocráticos : historia crítica con selección de textos.* Madrid: Gredos.

KLINE, M. (1992), *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid, Alianza Universidad.

KNORR, W. (1986) *The ancient tradition of geometric problems.* Boston: Birkhäuser.

KOYRÉ, A. (1983) *Estudios de historia del pensamiento científico.* Madrid: siglo XXI.

KUHN, Thomas S. (1978) *La revolución copernicana: la astronomía planetaria en el desarrollo del pensamiento occidental*. Barcelona: Ariel, 1978.

LAPPARENT, A. (1895), “Wantzel”*, École Politechnique, Libre du Centenaire* (1794-1894), París, Gauthier-Vilars, vol. I, 133-135.

LINDBERG, David C. (2002) *Los inicios de la ciencia occidental.* Barcelona: Paidos.

LLULL, José (2005) *La astronomía en el antiguo Egipto.* Valencia: Universidad.

LORIA, G. (1987) *Le Scienze Esatte nell'Antica Grecia*, Milano, Cisalpino-Goliardica.

LUSA, G. (1997). *Els Tres problemes especials de la geometria griega*. Barcelona: Facultat de Matemàtiques i Estadística.

MARCOLONGO, Roberto (1931)“Les Mathématiques il y à quarante siècles”, *Scientia*, LI, 237 (1)

MAZA GÓMEZ, Carlos (2009) *Las matemáticas en el antiguo Egipto: sus raíces económicas.* Sevilla: Universidad.

Metodología del conocimiento científico (1975) La Habana: Editorial de Ciencias Sociales. Instituto de Filosofía, Academia de Ciencias de la URSS; Departamento de Filosofía, Academia de Ciencias de Cuba.

MONDOLFO, Rodolfo (1971) *El Infinito en el pensamiento de la antigüedad clásica*. Buenos Aires : Eudeba, 2ª ed..

MONTESINOS SIRERA, José (1971) El continuo y el infinito en la Matemática Griega". *Historia de la Geometría Griega.* Actas del I Seminario "Orotava" de Historia de la Ciencia. Canarias: Consejeria de Cultura, 107-131.

NEUGEBAUER, O. (1969). *The Exact Sciences in Antiquity*. New York: Dover.

NEUGEBAUER, O. (1975). *A history of ancient mathematical astronomy.* Berlin: Springer-Verlag.

NIETO-GALAN, Agustí; ROCA-ROSELL, Antoni (2006), "Scientific education and the crisis of the university in 18th century Barcelona". A: Feingold, Mordechai; Navarro-Brotons, Victor, *Universities and Science in the Early Modern Period*. Dordrecht, Springer.

NORTH, John (2001) *Historia Fontana de la Astronomía y la cosmología.* Mexico: Fondo de Cultura Económica.

PAPPOS D'ALEXANDRIE (1982), *La Collection Mathématique,* París, Blanchard.

PUIG ADAM, P. (1958), *Curso de Geometría Métrica,* Madrid, Nuevas Gráficas,.

REY PASTOR, J.; BABINI, J. (1985), *Historia de la Matemática*, Barcelona, Gedisa.

REY, Abel (1961). *El apogeo de la ciencia técnica griega.* Mexico: Unión Tipogràfica Editorial Hispano Americana.

ROBINS, Gay (1987) *The Rhind mathematical papyrus an ancient Egyptian text* New York: Dover.

RUSSELL, Bertrand (1995). *Los Principios de la matemàtica*. Barcelona : Círculo de Lectores.

SAMBURSKY, Samuel (1963) *The physical world of the greeks.* London: Routledge & Kegan Paul.

SAN GERMÁN MALET, Leandro (1886), *Ensayos elementales sobre la trisección de un arco*, Barcelona, Imprenta y litografía de los Sucesores de Ramírez y Cia.

SAN GERMÁN MALET, Leandro (1897), *Problemas geométricos. División exacta de circunferencia y arcos particulares sin tanteo,* Barcelona, Henrich y Cª.

SAN GERMÁN MALET, Leandro (1899), *Geometría elemental. Problema de la trisección del ángulo,* Barcelona, Henrich y Cª.

SÁNCHEZ NAVARRO, Jesús (1991) "Fuentes e interpretaciones de la geometría griega". *Historia de la Geometría Griega.* Actas del I Seminario "Orotava" de Historia de la Ciencia. Canarias: Consejeria de Cultura, 37-57.

SÁNCHEZ PÉREZ, Jose Augusto (1943) *La Aritmética en Babilonia y Egipto.* Madrid: CSIC, Instituto Jorge Juan.

SÁNCHEZ PÉREZ, Jose Augusto (1946) *La Aritmética en Grecia.* Madrid: CSIC, Instituto Jorge Juan.

SMITH, D.E (1958). *History of Mathematica.*New York: Dover.

SCHRÖDINGER, E. (1961) *La naturaleza y los griegos*. Madrid: Aguilar.

STRUIK, D.J. (1967). *A concise history of mathematics.* New York: Dover.

SZABO, Aspad (1986) *Les débuts de l'astronomie, de la géographie et de la trigonométrie chez les grecs.* París: Vrin.

TANNERY, Paul (1988) *Géometrie grecque*. Georg Olms Verlags.

TATON, René (1988). *Historia general de las ciencias.* Barcelona: Orbis.

TOLEDO PRATS, Sergio (1971) **"**La geometría pitagórica Historia de la Geometría Griega". *Historia de la Geometría Griega.* Actas del I Seminario "Orotava" de Historia de la Ciencia. Canarias: Consejeria de Cultura, 79-104.

VERA, Francisco (1928). *Espacio, hiperespacio y tiempo.* Madrid: Paez.

VERA, Francisco (1978) *Científicos griegos*. Madrid: Aguilar.

VERA, Francisco (1963) *Breve historia de la geometría.* Buenos Aires: Losada.

VERNET, J.; PARÉS, R. (2004) *La Ciència en la Història dels Països Catalans. I. Dels Àrabs al Renaixement.* Valencia: Institut d'Estudis Catalans, Universitat de València. Vol. I, 75-114.

VIÑAS RIERA, Joan (1987), "El zero i l'infinit: la geometria a Barcelona al tombant del segle". A: DDAA (1987): *Cinquanta anys de Ciència i Tècnica a Catalunya*, Barcelona, Institut d'Estudis Catalans, 135-148.

WAERDER, B.L. Van der.(1988) *Science awakening Egyptian, Babylonian and Greek mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic.

WHITE, L. (1990) *Tecnología medieval y cambio social.* Barcelona: Paidos. 55-95.